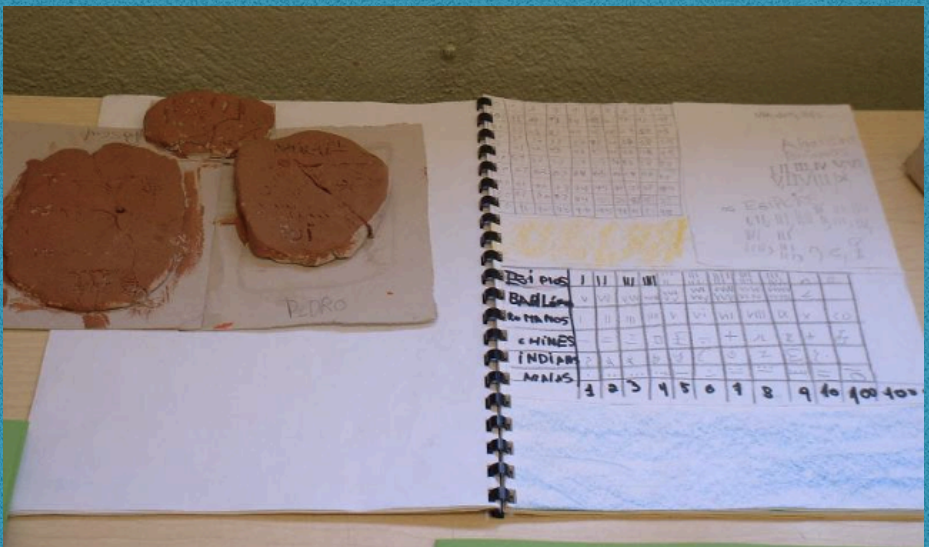
MIGUEL NARCISO E PASCAL PAULUS

Histórias de Matemática

Uma abordagem da didáctica experimental da matemática

2005

Capa: ilustração de um projeto de trabalho realizado por duas crianças de 7 anos sobre a história da matemática.

Algumas histórias foram anteriormente publicadas na revista Escola Moderna. Uma serviu também de base para um artigo na revista Educação e Matemática.

Fichas técnica

1ª versão: 2005

2ª versão: 2012

3ª versão: 2017

Referenciar como:

Narciso, M. e Paulus, P. (2006). *Explorar o material Cuisenaire*. http://pascalpaulus.weebly.com

Índice

Est-il indispensable d'étudier? Peut-être que non! Pendant plus de 40000 ans l'Homo Erectus a survécu, rivé à son environnement immédiat sans projet à long terme, sans mémoire, sans passé. Il subissait une nature, où tout semblait hostile, magique, terrifiant, inexplicable. Et aujourd'hui encore, il est possible de végéter, comme un chat d'appartement, hors de toute culture, en ne percevant que les aspect les plus pauvres de l'environnement. On peut subir avec docilité et résignation toutes les manipulations et tous les conditionnements. En revanche, pour décrypter le moindre outil que nous trouvons en état de fonctionnement à notre naissance, il faut que nous assimilions l'héritage culturel. C'est pour communiquer cette vision du monde et permettre à l'individu de surmonter la passivité des crédules et des superstitieux que l'enseignement de la mathématique est indispensable.

(Glaeser, 1999, p. 27)

Prefácio

Juntamos aqui algumas ideias e estratégias que consideramos importantes no desenvolvimento de atividades de iniciação à Matemática, relacionados com a análise e resolução de situações problemáticas de diversos tipos, encontrando-se expressos nos exemplos de discussões matemáticas entre o Pascal e os seus escolares. Estes exemplos são do seu trabalho como professor ao longo de vinte e um anos, abrangendo os dois países onde tem exercido a sua profissão, Bélgica e Portugal.

Intitulámos o conjunto de Histórias de Matemática porque todas as situações descritas reportam-nos a vivências e culturas de cada um e, por isso, esses momentos são bocadinhos das suas Histórias e da História de todos, que enquanto grupo partilharam, e tudo isto... sempre relacionado com a Matemática.

Em todas as histórias aqui relatadas está bem patente o recurso a uma didática experimental da matemática, tal como é proposta por Georges Glaeser (1999) para a escola primária[1]. Nos capítulos iniciais apresentamos algumas considerações teóricas relacionadas com a Didática da Matemática experimental.

---

[1] Já o afirmámos em outras ocasiões: na Europa dos 25, Portugal faz parte de uma minoria de 7 países onde a monodocência associada à escola primária se limita a 4 anos de escolaridade. 14 países têm uma escola com 6 anos de monodocência, 2 com 5, 1 com 7. De resto, existem algumas situações atípicas (dados recolhidos a partir de *Eurydice*)
Acrescentado à nota original de 2006: A Rede Eurydice 2012 define para Portugal a escola primária como aquela que corresponde aos 1º e 2º ciclos.

A resolução de problemas está, também, intrinsecamente relacionada com a própria sistematização e interacção do conhecimento e do pensamento, implicando, inevitavelmente, o desenvolvimento do cálculo mental e a utilização de diversos instrumentos de suporte imprescindíveis para que as crianças dos seis aos doze anos possam ir construindo concetualizações matemáticas. Por isso, consideramos de extrema importância que se dê a devida atenção e tempo à resolução de problemas na sala de aula.

Os autores, Cascais 2006

Introdução

Pensamos que a provocação "*Problematização sempre! Contas nunca mais!*" está presente no programa de matemática para o ensino básico em vigor desde 1989, ao centrar a aprendizagem da matemática na resolução de problemas. Não nos parece uma perigosa afirmação esquerdista ou pós-moderna, nem o dizemos por acaso.

No programa do Ensino Básico no que diz respeito à Matemática, são colocadas como as grandes finalidades em todo o ensino básico, o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, o desenvolvimento da capacidade de comunicação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Sendo que a resolução de problemas é considerada a atividade central, a partir da qual estão organizados os três blocos de conteúdos do seu programa, tal como se pode ver no esquema relativamente ao 1º ciclo na página seguinte.

Como podemos verificar pela figura 1 (*ver página seguinte*), retirada do programa do Ministério da Educação/DEB para o Ensino Básico, a resolução de problemas é considerada a atividade central de todo o programa de Matemática para o 1º ciclo porque, sendo promotora do raciocínio e da comunicação, coloca o aluno numa atitude ativa da aprendizagem, dando-lhe a possibilidade de explorar e construir conceitos como resposta às interrogações levantadas, incitando-o a utilizar as aquisições feitas e a testá-las.

Ainda no mesmo documento, o Ministério da Educação refere que é fundamental para a existência de aprendizagem uma reacção dinâmica por parte da criança a uma questão que suscite o seu inte-

resse e curiosidade. Neste sentido, ela interessar-se-á, naturalmente, por problemas práticos relacionados com a sua vida na escola ou com as suas próprias vivências fora da escola, implicando a abertura desta à comunidade ou, podendo ser o próprio problema um resultado dessa mesma abertura.

Figura1: Retirada do Currículo Nacional do Ensino Básico – Programas Disciplinares

Também noutro documento do Ministério da Educação, nomeadamente, o que se refere às Competências Essenciais para todo o Ensino Básico, e em particular no que diz respeito à Matemática, destaca-se como uma das suas principais finalidades, desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, o que implica, necessariamente, que "*a ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de con-*

hecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo".

Salientamos ainda, tal como é referido neste último documento, que a Matemática é uma área de conhecimentos cheia de potencialidades para a realização de projetos transdisciplinares e de atividades interdisciplinares de diversos tipos, pelo que se deve combinar os conhecimentos matemáticos com outros conhecimentos ao lidar com as mais diversas situações da realidade, possibilitando, ao mesmo tempo, o desenvolvimento do sentido crítico e da autonomia dos alunos.

As situações problemáticas descritas a seguir, expressas como exemplos de explorações e discussões matemáticas, representam todo um trabalho realizado conjuntamente com as crianças, podendo não ser muito claro para quem os lê o seguinte: esteve sempre bem presente todo um trabalho *a priori* e *a posteriori* da situação vivenciada, de construção e reconstrução de conceitos matemáticos, num processo individual, embora sempre com partilha e reflexão em grupo, implicando um pensamento abstrato por parte das crianças, sem, contudo, nunca deixar que todos estes conceitos e conhecimentos matemáticos fossem descontextualizados por forma a que lhes fizessem sentido.

Ponte e Serrazina (2000) referem alguns dos processos matemáticos envolvidos no ensino-aprendizagem da Matemática, que para eles são de especial importância ao nível do 1º Ciclo. Estes processos encontram-se organizados em quatro grandes grupos, nomeadamente:

- Representar, incluindo a compreensão e uso de símbolos, convenções, gráficos, etc...

- Relacionar e operar, inclui o cálculo e a dedução, relacionar e interpretar ideias matemáticas em situações do dia-a-dia.
- Resolver problemas e investigar situações matemáticas e extra-matemáticas.
- Comunicar, utilizando diferentes linguagens e suportes.

Todos estes processos mencionados pelos autores encontram-se patentes nas situações descritas, tal como se poderá verificar pela sua leitura e análise. Existe, também, uma clara e óbvia relação entre o conteúdo das situações problemáticas e o conteúdo do programa curricular para o 1º ciclo ao nível da Matemática (acima representado em esquema), contudo os exemplos trazidos aqui não abordam todos os conteúdos do programa, até porque essa não foi uma preocupação nossa. Assim, as situações descritas são exemplos de como é possível trabalhar variados conteúdos curriculares de Matemática num enquadramento de resolução de problemas em que as crianças estão intrinsecamente envolvidas na construção das suas soluções.

Desta forma, podemos identificar situações propostas pelo próprio Pascal para resolução e outras situações que, ou, foram vivenciadas por alguma das crianças, ou, pelo grupo e trazidas para a sala para explorar os seus conceitos e implicações matemáticas, ou ainda, situações que a própria sociedade estaria a vivenciar naquele momento e que funcionaram como mote a reflexões matemáticas, ou, por fim, situações relacionadas com rotinas ou tarefas da turma.

O primeiro grupo de situações problemáticas é sobre medidas, o segundo grupo encontra-se mais relacionado com os números e operações, mais especificamente com o desenvolvimento do cálculo mental, representação esquemática, utilização de simbologia matemática e de material didático estruturado, o terceiro grupo está relacionado com a estatística e probabilidades e organização e análise de

dados, por último, uma adenda sobre a construção de enunciados a partir de expressões numéricas.

Mas antes de passar a palavra às crianças, deixamos algumas considerações teóricas relacionadas com a didática da matemática e com a resolução de problemas.

Há também um curto texto que retrata como o Pascal costuma organizar a sua sala de aula e alguns dos materiais que utiliza especificamente para a Matemática, que por isso mesmo se intitula "Em contexto de sala de aula... como acontece?"

Didática Experimental da Matemática

Remi Brissiaud[2] afirma que esta nova disciplina, a didática da Matemática, tem por objeto o de estudar os processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos dessa ciência, a Matemática, particularmente na situação escolar e universitária. Se este conjunto de conhecimentos tivesse existido em 1970, talvez não se tivesse feito o erro de traduzir em atividades de sala de aula as definições piagetianas e matemáticas do número.

Constatamos que, até aos anos ’70 do século XX, não se esclareceu verdadeiramente o que se pretendia com as aulas identificadas como de matemática na escola básica. É claro que – desde o alargamento da obrigatoriedade da disciplina na escola pública, há mais ou menos século e meio – se optou por familiarizar as crianças com as técnicas de aritmética, e que, para isso, se copiou o modelo da época para a aprendizagem da leitura: treino exaustivo, graduado do mais fácil ao mais difícil.

No início dos anos 70, os adeptos do que ficou conhecido como matemática moderna, propõem a abordagem do cálculo apoiada no homomorfismo existente nas bases de representação de números, mas basicamente, continuam a valorizar a aprendizagem aritmética.

John Allen Paulos[3] escreve a respeito do treino e da aritmética: “*Na minha opinião, a atenção da escola ao cálculo é excessiva e obsessiva.*

---

[2] Brissiaud(1989) citando M. Artigue e R. Douady (1986) – ver referências bibliográficas.

[3] Paulos, John Allen (1991) – ver referências bibliográficas.

Não existe nada de errado, é claro, no conhecimento das tabuadas da adição e de multiplicação e dos algoritmos básicos [...] Acontece apenas que, após algum treino de rotina, estas capacidades devem ser encaradas como ferramentas para alargar a compreensão e não como substitutos da compreensão."

A partir da segunda metade da década de 70, perante o óbvio insucesso alargado, os investigadores pós-Piaget que reivindicam a construção de uma nova didática da matemática, questionam a aprendizagem a partir do treino. "*Não foi porque a criança não chegava a produzir o comportamento esperado, nem porque os alunos estavam particularmente infelizes, que o ensino precoce de tais processos de cálculo [algoritmo no jardim de infância] foi rejeitado mas pela preocupação com a eficácia didática, porque certos 'sucessos' aparentes correm o risco de preparar futuros insucessos*"[4].

Por outro lado, não deixa de ser interessante observarmos a forma como alguns responsáveis pela educação[5] no nosso país continuam, muito recentemente, a falar do ensino-aprendizagem da Matemática reportando-se apenas à aprendizagem "das contas", assim como também continuamos a ouvir vozes de alguns que podemos designar de "velhos do Restelo", professores, pais e outras pessoas ligadas direta ou indiretamente com a educação, a fazerem apelo aos saudosos "bons velhos processos".

Uma justificação para estas resistências à mudança é que "*sempre foi difícil para a sociedade lidar com a criatividade, a inovação e os conhecimentos novos*"[6]. Se isto é verdade para a sociedade, digamos que para

---

[4] Brissiaud, R. (1989) – *idem*

[5] Como o então Ministro de Educação, que se referia à escola do 1º Ciclo como onde se aprende "as letras e as contas" numa entrevista ao *Expresso*, em 06 de Fevereiro de 1999.

[6] Holton, Gerald (1996) – ver referências bibliográficas.

a escola e para os seus agentes, a incapacidade de inovar a instituição, revela-se um espelho perfeito desta sociedade.

A problematização obriga a uma escola democrática, isto é, uma escola onde os alunos participam no seu processo de aprendizagem. "*Pensamento científico implica criatividade e democracia*"[7]. A escola do 1º ciclo e pública está carente das duas.

Porquê, então, é que o lugar comum da matemática ser a mal amada? Por tradição, ou porque é incómoda? Insistimos que "*os valores da ciência e os da democracia são coincidentes e, em muitos casos, impossíveis de distinguir. A ciência e a democracia tiveram início – nas suas encarnações civilizadas – ao mesmo tempo e no mesmo lugar, na Grécia dos séculos VII e VI a.C. A ciência confere poder a quem quer que se dê ao trabalho de a aprender (embora demasiadas pessoas tenham sido sistematicamente impedidas de o fazer). [...] Os seus valores são a antítese do que é secreto. [...] A ciência é uma maneira de desmascarar aqueles que só simulam o conhecimento. É um baluarte contra o misticismo, contra a superstição, contra a religião incorrectamente aplicada a campos onde não deveria interferir.*"[8]

Mas não é menos verdade que a democracia representativa pode não ser o espelho mais correto das aspirações de um grupo de pessoas. Foi o que crianças de 10 anos perceberam na discussão acerca de formas de eleger representantes. Perceberam que se pode melhorar procedimentos, sejam eles matemáticos – quando dos enunciados – sejam eles sociais.

Não temos, como antigamente, crianças que, fora da escola – por terem aí um meio rico e propenso à leitura e à discussão – constroem um referencial que permite a concetualização. Logo implica que a

---

[7] Carl Sagan(1997) – ver referências bibliográficas.

[8] *Idem* nota 7.

escola tem de fornecer os instrumentos que permitam tal construção. E este trabalho é muito necessário.

"Na maioria das atividades, a vida só oferece um pequeno número de casos entre os problemas possíveis. Além disso, nas situações habituais da vida, os dados pertinentes estão imersos num conjunto de informações pouco ou nada pertinentes, sem que sejam sempre claramente expressas as perguntas que podem ser feitas. Desta forma, o tratamento destas situações supõe ao mesmo tempo a identificação das questões e também das operações a fazer para lhes poder responder. Isto convida à análise, mas não é fácil começar pelas situações da vida para estabelecer uma classificação sistemática."[9].

Contudo, não entendamos a partir destas palavras de Vergnaud que, por não ser fácil começar pelas situações da vida, não faz sentido contextualizar os processos de aprendizagens em situações mais do quotidiano e das vivências dos alunos, ou partir destas para saberes mais abstratos e mais estruturados, antes pelo contrário. Desta forma, a construção de concetualizações Matemáticas ganha outro significado e valor.

Neste mesmo sentido, fica bem claro que "*com os enunciados clássicos as crianças são conduzidas a elaborar as representações fora do contexto, a partir das únicas indicações linguísticas contidas do enunciado (seja ele escrito ou oral). A tarefa é muito mais difícil do que quando o pedagogo parte de um problema prático. Ora quando a dificuldade é muito grande, algumas crianças logo constroem regras de funcionamento escolar do género:* 'Face a um enunciado, eu somo todos os números' *ou* 'Eu reconto todo o conjunto'."[10] Temos exemplos muito claros disso, em que, várias vezes, as crianças começam por juntar tudo ou contar tudo, e que só depois de confrontados pelo adulto, iniciam um tra-

[9] Vergnaud (1986) – ver referências bibliográficas.

[10] Brissiaud (1989).

balho de análise do problema. Assim, a análise de problemas do dia a dia só ganha interesse no processo de aprendizagem, se os alunos encontram e constroem, na turma que gerem em cooperação com o adulto, o referencial necessário à análise e à construção de conceitos.

Neste contexto, Gerard Vergnaud[11] chama a atenção sobre a importância dos teoremas-em-ato que, segundo o autor, são estes os elementos que permitem a realização da seleção da informação mais relevante e o seu posterior tratamento, ou seja, orientam e organizam o atuar da criança sobre o real.

Os teoremas-em-ato englobam uma grande variedade de conteúdos e permitem analisar e avaliar, de maneira rigorosa, os conhecimentos da criança, ou seja, quais são operatórios e quais não são. Estes teoremas-em-ato têm, assim, a ver com as proposições consideradas como verdadeiras pelo sujeito, proposições estas que permitem tratar a informação como adequada ao real. Eles surgem da atividade espontânea e intuitiva da criança e podem ser considerados como uma forma do conhecimento ligado à ação, têm uma natureza implícita e por isso, num determinado momento do desenvolvimento, não são expressos sob uma forma matemática.

Os teoremas-em-ato começam a transformar-se em teoremas à medida que a criança vai sendo confrontada com uma diversidade de situações-problemas, de procedimentos e representações simbólicas. A criança vai progressivamente descobrindo as propriedades dos conceitos, os invariantes começam a ficar mais explícitos e a relação entre o significado e o significante fica cada vez mais clara.

É na transformação dos teoremas-em-ato em teoremas e vice versa que reside um dos problemas do ensino, visto que podem existir conhecimentos que foram aprendidos e que as crianças não con-

[11] Vergnaud (1986 – 1994).

seguem aplicar quando resolvem problemas concretos e, noutros casos, a criança constrói espontaneamente conhecimentos operatórios que não se convertem em verdadeiros enunciados.

Gérard Vergnaud[12] considera que os processos cognitivos e as respostas do sujeito são funções das situações com as quais são confrontados e remete-nos para duas ideias principais:

- a ideia da variedade, i.e., a necessidade de criar um sem-número de situações a partir de acontecimentos do dia a dia;
- a ideia da história, i.e., a necessidade de acompanhar a par e passo a história pessoal do aluno na sua aprendizagem, sem o que não será possível reformular as situações de maneira a que se tornem perceptíveis para ele.

Complementando estas ideias, citamos Sérgio Niza, quando afirma: "*A escola passou a ser uma instituição social atravessada pelas dinâmicas sociais, pelas perturbações, pelas inquietações. Os saberes académicos já não são pensáveis sem os saberes do quotidiano, sem o saber espontâneo do quotidiano, das culturas não humanísticas e não científicas, não académicas. Esta interpenetração inevitável dos saberes do quotidiano com os saberes académicos fez rebentar a vocação original da escola.*"[13]

[12] Vergnaud (1996).

[13] Sérgio Niza, numa entrevista concedida à revista Palavras (12-10-97).

Problematizar

É do conhecimento geral, tal como já foi referido, que os processos matemáticos estão presentes quotidianamente na organização e estruturação do mundo que rodeia a criança. De facto, se nas aprendizagens dos referidos processos matemáticos a escola tem um papel muito importante, é, no entanto, na experiência extra-escolar, e desde muito cedo, que a criança inicia o processo de aprendizagem e apropriação do saber matemático[14].

Assim, compreendemos que faz todo o sentido para o ensino da matemática que as aprendizagens partam de situações com significado para a criança, por forma a que se torne num processo de aprendizagem de estruturação da experiência[15].

Uma das noções matemáticas fundamentais é a noção de número, apresentando-se como uma noção complexa e que demora algum tempo a consolidar-se. Esta noção interliga-se com a apropriação de outras noções ou conceitos, que se relacionam com a aquisição das seguintes competências: apropriação da sequência numérica, processos de contagem e representação num sistema de signos e regras convencionais[16].

A numeração escrita é um sistema gráfico culturalmente elaborado, dotado de duas especificidades fundamentais, por um lado, é

---

14 Ver Matta (2001).

15 Ver Vergnaud (1986).

16 Ver Matta, 2001, Valente, C., 1999.

ideográfica, ou seja, transmite uma ideia, não existindo uma correspondência, tal como na escrita alfabética, fonema-grafema e, por outro lado, o valor dos números depende da sua posição, ou seja, do seu valor posicional, ao contrário do sistema alfabético onde todas as letras têm o mesmo valor. A escrita dos números exige, desta forma, um grande nível de abstração e complexidade[17].

No entender de Gérard Vergnaud[18], é na resolução de situações diversificadas que se alarga a significação dos conceitos, sendo a resolução de problemas, em particular, a origem e o critério do saber operatório. Assim, um problema é qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipóteses e verificação para produzir uma solução.

O autor, neste sentido, afirma que o saber forma-se a partir de problemas a resolver, ou seja, de situações a dominar. Contudo, isto não se verifica no ensino comum das matemáticas onde a tendência mais corrente é a de ensinar maneiras de fazer ou algoritmos, ligando os problemas a classes relativamente limitadas. Para a criança é um problema calcular o efetivo de um conjunto formado por duas partes sem tornar a contar cada uma das duas partes.

Podemos parafrasear John Allen Paulos[19] e afirmar que o cálculo por si próprio não ensina nem concetualiza nada. Trata-se apenas de uma estrutura rígida que ajuda a dar corpo ao processo de investigação, pelos resultados que mostra quando consequentemente aplicado: chega ou não chega a uma solução, que solução, etc. . Mas só no quadro desta investigação, é possível interpretar o que o algoritmo transmite em situações "absurdas": qualquer tentativa para

---

17 Ver Matta (2001).

18 Vergnaud, (1986) e (1994).

19 John Allen Paulos (1993), pp 38-42.

definir o preço médio de uma prenda que não existe, leva a resultados que parecem impossíveis[20]. É a reformulação do problema que pode fazer perceber que se trata duma situação limite e não a simples aplicação do algoritmo.

Gérard Vergnaud[21], de acordo com este contexto, referiu o quanto é importante na investigação em didática estudar, analisar e classificar as situações-problema que conferem significação e função a um conceito, dado que o desenvolvimento do conhecimento de uma criança faz-se através de campos concetuais, permitindo assim, apelar no ensino a uma maior variedade de relações e problemas e aprofundar a epistemologia de um conceito relativamente à sua função e à sua radicação.

A resolução de problemas implica que a criança compreenda e represente mentalmente a situação descrita verbalmente e consiga elaborar um procedimento de resolução. Esta questão de representação é a mais complexa e onde parece existir mais dificuldade por parte das crianças[22]. Seja como for, os enunciados melhor compreendidos são os que se referem a situações familiares e significativas para a criança[23].

Rémi Brissiaud apresenta o seguinte esquema onde podemos identificar vários passos que as crianças podem fazer face a um problema prático sem, no entanto, terem que recorrer directamente à sua resolução prática.

---

[20] Quer na análise da Festa do Magusto, onde não se consegue dividir por 0, porque não se consegue determinar o preço de uma prenda que não chegou a existir, quer no problema do Capitão Flint, em que um conjunto ímpar de números ímpares somadas nunca possibilita chegar a um resultado par.

[21] Vergnaud (1986, 1994).

[22] Mata (2001).

[23] *Idem* nota 22.

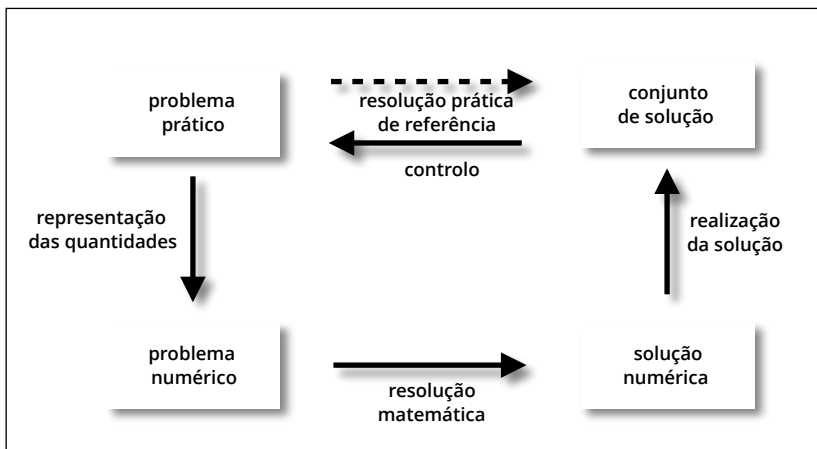



Figura 2: Brissiaud- Circuito de resolução de problemas

Este esquema torna, também, mais clara a necessidade constante de fazer apelo ao vocabulário, à linguagem oral, à linguagem escrita e à linguagem matemática para poder construir quadros de referência.

Gérard Vergnaud[24] apresenta para as relações aditivas seis categorias correspondentes a diferentes tipos de problemas formulados com base em relações semânticas mais ou menos facilitadoras da representação mental das relações entre os elementos da situação descrita no enunciado do problema, e que descrevemos a seguir.

- A primeira categoria de relações aditivas remete para uma composição de medidas, ou seja, duas medidas compõem-se para originar uma medida (e.g. "*O Paulo tem 6 berlindes de vidro e 8 berlindes de metal. Ele tem ao todo 14 berlindes.*").
- A segunda categoria tem a ver com uma transformação de uma medida, ou seja, uma transformação opera sobre uma medida para originar uma medida (e.g. "*O Paulo tem 7 berlindes no início do jogo. Ele ganhou 4 berlindes. O Paulo agora tem 11.*").

[24] *Idem nota 21.*

Figura 2: esquema de resolução de problemas de Brissiaud

- A terceira categoria remete para uma comparação de medidas, uma relação encadeia duas medidas (e.g. "*O Paulo tem 8 berlindes. O João tem menos 5. Logo o João tem 3.*").
- A quarta categoria remete para uma composição de transformações, ou seja, duas transformações compõem-se para dar origem a uma transformação (e.g. "*O Paulo ganhou 6 berlindes e perdeu 9 berlindes hoje. Ao todo ele perdeu 3.*").
- A quinta categoria tem a ver com uma transformação de uma medida (de um estado relativo), ou seja, uma transformação opera sobre uma situação relativa (relação) para dar origem a uma situação relativa (e.g. "*O Paulo deve 6 berlindes ao Henrique. E ele deve-lhe 4. O Paulo não deve mais que 2.*").
- A sexta categoria remete para uma composição de relações (de estados relativos), ou seja, duas situações relativas (relações) compõem-se para dar origem a uma situação relativa (e.g. "*O Paulo deve ao Henrique 6 berlindes, mas o Henrique deve-lhe 4. O Paulo deve pois dois berlindes ao Henrique.*").

Cada uma destas categorias de relações permite construir várias categorias de problemas distintos e de dificuldade variável, conforme o lugar do desconhecido, o valor positivo ou negativo das variáveis numéricas, o domínio da experiência de referência, o padrão de informação fornecido, etc, sendo possível construir um conjunto vasto de situações de adição ou de subtracção através das quais a criança faz um percurso diferente das que lhe aparecem como prototípicas da adição e da subtração, uma quantidade que aumenta ou diminui[25].

O desenvolvimento das conceções e das competências da criança é um percurso complexo, e para o perceber é preciso analisar as con-

[25] Vergnaud, Gérard (1994).

dutas dos alunos em situação, as suas formulações, os seus procedimentos, os afastamentos entre as exigências do professor e as tentativas dos alunos. Verifica-se que o percurso no campo concetual das estruturas aditivas é complexo e comporta muitas dificuldades, metáforas, incompreensões e mal entendidos. Assim, é importante dar uma grande importância aos teoremas-em-ato descobertos ou compreendidos intuitivamente pelas crianças em situação.

Num plano prático, levados pela situação e pela reflexão que ela própria suscita, os alunos e o professor testam possibilidades e constroem o que Vergnaud[26] designa como conceitos-em-ato, discutindo frequências e médias num caso, discutindo padrões e derivados para um limite conhecido noutro.

Não se trata de "aprender o conceito de média" ou "fixar o conceito de limite", ou ainda "concetualizar as leis da probabilidade", ou..., mas de analisar, numa situação muito concreta, o que se passa exactamente, procurando uma linguagem comum. Este trabalho é fundamental no processo didático que permite às crianças cada uma por si alcançar um quadro de referência matemático incompleto e provisório, um conjunto de conceitos-em-ato, para mais tarde chegar a verdadeiros conceitos.

Os teoremas-em-ato englobam uma grande variedade de conteúdos e permitem analisar e avaliar, de maneira rigorosa, os conhecimentos da criança, ou seja, quais são operatórios e quais não são. Estes teoremas-em-ato têm, assim, a ver com as proposições consideradas como verdadeiras pelo sujeito, proposições estas que permitem tratar a informação como adequada ao real. Eles surgem da atividade espontânea e intuitiva da criança e podem ser considerados como uma forma do conhecimento ligado à ação, têm uma na-

---

[26] Vergnaud, Gérard (1986, 1994).

tureza implícita e por isso, num determinado momento do desenvolvimento, não são expressos sob uma forma matemática[27].

Exemplificando, digamos que as letras necessárias num jogo do Scrabble obrigam, à partida, a um raciocínio em que se consegue aplicar um algoritmo uniforme para todos. O resultado obtido mostra por outro lado, que a simples tradução do pensamento subjacente ao cálculo da distribuição das letras num universo artificialmente limitado, aplicando a(s) operação(ões) escolhida(s), não retrata fielmente a verdadeira realidade sentida: é preciso compensar as letras pouco frequentes com uma presença obrigatória, que foge às regras do algoritmo escolhido. É exactamente esta constatação e esta análise que permite a subtileza da problematização e da montagem dum raciocínio lógico, algo que o algoritmo por si só nunca poderá revelar.

Vergnaud[28] lembra que a concetualização é o fim dum longo processo, que passa por múltiplas manipulações que cristalizam momentaneamente em conceitos-em-ato. Os conceitos-em-ato serão depois mobilizados em novas situações parecidas (Ouvimos as crianças observar "*isto é como fizemos no jogo do Scrabble*", "*isto é mais ou menos como quando fizemos o problema das rifas*", "*isto é como quando da viagem do Eddy*", "*isto é como na planta da sala*") que poderão servir de trama para ajudar a analisar o novo problema. É também nestas novas situações que os conceitos-em-ato podem ser reformulados, alterados, posto de lado por outros. Mas nunca desaparecem. Servem cada uma das crianças no seu próprio processo de concetualização, porque é cada criança por si que procura globalizar e generalizar o seu modelo referencial.

---

27 Vergnaud, Gérard (1981, 1986).

28 Vergnaud, Gérard (1996).

Pondo as coisas desta forma, o ficheiro de problemas, as tabelas como a tabuada, o material Cuisenaire ou material MAB, o treino de habilidades na aplicação dos mais diversos algoritmos, etc., são cada um apenas instrumentos estruturantes. Não dão conhecimento. Ajudam a visualizar melhor um raciocínio, porque ajudam a abstrair. Por isso são absolutamente necessários.

O verdadeiro trabalho matemático, porém, está na própria situação e na sua respetiva problematização. A investigação na didática da matemática realizada nos últimos 20 anos aponta neste sentido.

Na sala de aula... como acontece?

Muitos dos relatos que se seguem descrevem acontecimentos que necessitaram de um tratamento aprofundado, o que implicou abordagens sucessivas do problema, tentando fixar pouco a pouco o seu significado matemático. São situações em 6 turmas diferentes, três das quais com o mesmo grupo de crianças, acompanhadas pelo Pascal, do 2º até ao 4º ano. As outras situações são de um 5º ano (Bélgica) e de turmas de 3º ou 4º ano.

Estamos convictos que as discussões matemáticas em coletivo ou em pequenos grupos são um aspeto fundamental para ajudar as crianças a desenvolver o vocabulário necessário para chegar à concetualização.

Porém pensamos que estas discussões só têm sentido quando coexistem com um conjunto de outras atividades rotineiras de construção de saber matemática, na sala de aula. Concordamos em absoluto com Roland Charnay (2004) – formador no Institut Universitaire de Formation de Maîtres (IUFM) de Lyon e investigador associado do Institut National de Recherches Pédagogiques – quando destaca a importância simultânea que se deve dar ao cálculo mental, ao treino e ao sentido.

Nas turmas em que Pascal discute matematicamente, com as crianças, o dia a dia ou as situações inventadas, encontramos sempre outros rituais igualmente importantes. Uma delas é a grande frequência com que os escolares e o professor organizam entre eles "concursos" de cálculo mental, à volta da tabuada, a partir de expressões ou ainda com padrões numéricos.

Outra é a utilização coletiva e regular do geoplano para explorar não só padrões e regularidades geométricas, deduzindo a partir daí relações entre figuras regulares que permitem perceber padrões recorrentes no cálculo de áreas e de perímetros.
Há, em todos os casos, um ficheiro de treino organizado, que conduz as crianças no seu aperfeiçoamento de técnicas de cálculo com os algoritmos básicos e a sua relação com o cálculo mental. Este ficheiro está articulado com as exigências do currículo e do programa do respetivo ano de escolaridade.

Em todas as turmas existem materiais que permitem a concretização das operações ou um apoio visual ao raciocínio. São tabelas, como "*a casa dos números*" (ou o prédio…) e a tabuada de Pitágoras, completadas com a minicalculadora de Papy, pequeno instrumento de representação do cálculo nas bases binária e decimal, feita de cartolina e que só obriga a uma dezena de pequenos botões ou fichas por criança.

Todas as turmas dispunham também de geoplanos, com uma área de 100 "quadrados" de referência — normalmente martelados pelos próprios pais das crianças: basta uma prancha quadrada de 30 cm de lado e 121 pregos de latão com cabeça redonda, formando assim uma esquadrilha de 10 por 10.

Conforme os locais de trabalho, dispunha-se em cada sala pelo menos de material Cuisenaire ou de material MAB, algumas vezes dos dois materiais em simultâneo. Enquanto que o custo dos outros instrumentos de apoio é perfeitamente comportável através da verba atribuída ao projecto curricular de turma, a compra deste último material tem que ser inscrito nas aquisições a fazer para a concretização do projecto educativo da escola. Uma alternativa é negociar com os pais a substituição de dinheiro gasto em manuais para o gastar neste material, tornando-o propriedade das crianças.

Diga-se de passagem que o manual pode na maioria dos casos perfeitamente ser substituído pelos instrumentos acima referidos. É

que às vezes eles nem correspondem ao pressuposto do programa e do currículo, como se verificou numa das sessões de escolha de manuais na escola onde trabalhámos na altura[29].

Inferimos até que, mais do que o preenchimento do manual, será o trabalho de sistematização, no dia a dia, a partir de situações discutidas e concretizadas que permitirá os alunos evoluírem. Na melhor dos hipóteses, o manual poderá ser um companheiro de estrada, quando não se dispor de um ficheiro de treino bem elaborado e equipado.
Resumimos, com o pragmatismo do Pascal:

Os instrumentos de apoio.

Tentei simplificar ao máximo a organização do trabalho de matemática.

Disponho de:

- um ficheiro de treino, graduado e identificado para as operações básicas;
- um ficheiro com problemas (para consolidar a transposição de problemas em esquema);
- um bom caderno de problemas da Júlia Soares e Rosalina de Almeida, editado na Raiz editora, e que ainda apanhei um mês antes de a editora descontinuar o caderno.
- alguns jogos de matemática, comprados no Ábaco e na Bélgica.

[29] Nota acrescentada em 2017 por Pascal: infelizmente o individualismo combinado com o lobbying das editoras de manuais escolares, reduzem cada vez mais o conceito de material escolar aos manuais escolares individuais. A individualização que assegura o negocio é concretizada sob forma de livros transformados em cadernos ou documentos virtuais com assinatura para um ano, de seguida bloqueados. Estas práticas nocivas para o erário público (subsídios estatais às grandes editoras entendidos como o compromisso de um ensino básico tendencialmente gratuito) e para a aprendizagem socializada, tem se alastradas cada vez mais, de governo para governo. O resultado é uma estandardização geral que contraria o discurso “politicamente correto” para alguns sectores políticos, mas normalmente odiado pelo Poder centralizado, em relação a diferenciação.

O horário prevê dois "ateliers de matemática" (3 horas) e pelo menos mais 6 horas semanais de possibilidade de estudo autónomo, e 3 momentos de aproximadamente uma hora para trabalho coletivo de matemática.

O material de apoio para a maior parte das situações de cálculo resuma-se à:

- O prédio dos números (frente cartolina plastificada) (números e nomes);
- A tabela de Pitágoras (verso da cartolina), com as tábuas por baixo;

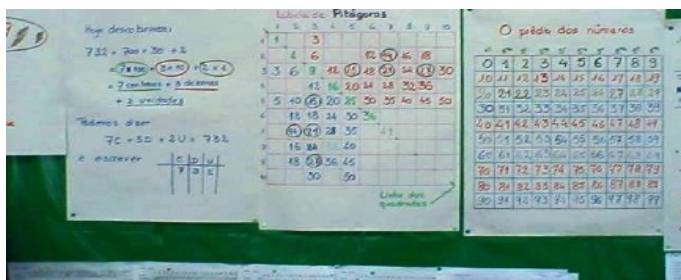



Figura 3: cartazes coletivos com a tabuada (ainda em construção) e o prédio dos números

- 6 caixas de material Cuisenaire em madeira e com as medidas correctas..

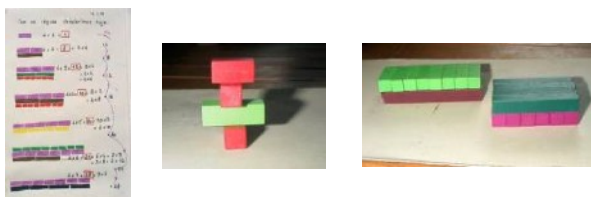



Figura 4: decomposições com o material Cuisenaire.

Para situações de geometria (e pontualmente também de cálculo) recorro a:

- 11 geoplanos (10 x 10), papel quadriculado;
- 20 tangram's pequenos e 4 grandes.

Medidas, volumes e capacidades

Medir volumes e capacidades costuma ser mais complicado do que medir comprimentos ou do que pesar objetos.

Além do problema que encontramos em termos de medida — o sistema métrico propõe uma unidade muito pequena de 1 cm3 (1 cc, 1 ml) ou uma demasiado grande (1 dm^3 ou 1 l) para não falar do m^3 enorme — encontramos também um outro nível de dificuldade: a comparação.

No caso dos comprimentos podemos, depois duma fase experimental com medidas não estandardizadas, colocar o instrumento graduado (metro, fita métrica, etc.) ao lado ou em cima do objeto que queremos medir.

Para pesar um objeto, uma balança onde colocamos dum lado o objeto e do outro lado os pesos estandardizados, fará o trabalho.
Para medir áreas, podemos recorrer ao geoplano ou ao papel quadriculado que nos dará uma medição fácil, dado que os quadrados são uma medida estandardizada.
Será que para o volume estaremos condenados a só encher — cubos e paralelepípedos de cubos M.A.B. ou de barras Cuisenaire?
Para já teremos de definir o campo! O volume dum objeto pode ser bastante superior ao conteúdo referido no rótulo, ou até a capacidade.

Imaginemos um bocal de vidro bem grosso (os frascos para esterilizar WECK p.e.). O volume (isto é, o espaço que o frasco ocupa no universo) é maior do que a capacidade que ele tem. Por outras

palavras: mesmo se o enchermos até transbordar, o volume do cilindro de sopa que obtemos assim, será sempre inferior ao volume do recipiente.

Se além disso não enchermos o recipiente por completo (se não esgotarmos a sua capacidade), o volume do material contido dentro do recipiente não tem nada a ver com o volume deste.

Assim, as coisas complicam-se. Na escola primária costuma-se calcular "volumes" enchendo frascos de água ou de areia, e depois transfere-se o recheio para um recipiente graduado. De facto, o que se faz é controlar a capacidade do recipiente.

Quer isto dizer que, para não induzir as crianças em erro, é preferível voltar ao ditado das formulas sem mais? Lembrem-se: "*para medir o volume dum corpo multiplica-se a base pela altura*".

Isto tem vários inconvenientes:

(1) Reduzimos outra vez o estudo dos corpos ao cálculo de alguns volumes de corpos geométricos (e há corpos muito mais aliciantes no mundo do que os geométricos).

(2) Damos a falsa ideia às crianças de que o conceito de volume é um conceito abstrato, resultante duma operação matemática.

(3) Esquecemo-nos do objeto psico-pedagógico da abordagem destes conceitos difíceis de volume e de capacidade na escola básica: "*Os exercícios de estimativa de capacidades tão necessários para a introdução do conceito importantíssimo da conservação da quantidade.*"[30].

Só controlando e comparando, as crianças perceberão que são necessários 6 frasquinhos A para encher o frasco B — e que com o conteúdo do frasco B — se pode voltar a encher os 6 frasquinhos A. Só assim perceberão que o líquido que enche

[30] Dienes (Sem data).

uma frigideira chata e um vaso fino e alto pode perfeitamente ter o mesmo volume (dado que a frigideira e o vaso têm a mesma capacidade).

Quer isto então dizer que a partir de agora já não falamos de volume nem de fórmulas, mas só de capacidade?

Também pensamos que não. Imaginemos uma colher de xarope (que se encontra numa embalagem dum medicamento). Estas colheres costumam ter capacidades pequenas, muitas vezes de 5 ml. Será uma experiência interessante comparar a capacidade da nossa colher de 5 ml com a capacidade e um pequeno recipiente que "construímos", escavando um pedaço de barro com barras Cuisenaire.

Constataremos que, no nosso caso, uma colher de água enche exatamente o recipiente do exemplo construído com a barra 5. Algum cálculo ensinará que o volume da barra e da água é de 5 cm^3. Já sabíamos que a capacidade da colher era de 5 ml.

Assim: a capacidade do barro ou da colher é de 5 ml ou de 5cm^3. O volume da água (o espaço que esta água ocupa no universo) é de 5 cm^3.

É provável que haja quem conclua que no caso da barra Cuisenaire o volume e a capacidade são iguais, mas que isto não acontece com a colher nem com o barro.
Para medir o volume destes objetos podemos submergi-los num frasco graduado que contenha água. O espaço que o objeto ocupa no universo torna-se agora mais legível: a água subiu correspondentemente e podemos calcular a diferença entre os dois marcos.
É claro que assim torna-se importante termos na sala um espaço para armazenar o material de que necessitamos para as nossas experiências.

Propomos:

- todo o tipo de embalagens que têm indicação de conteúdo;
- uma série de frascos do mesmo tipo mas de diferentes tamanhos
- material MAB e/ou material Cuisenaire;
- embalagens "Tetra-pack", eventualmente adaptadas para a capacidade ser exactamente de 1 dm^3;
- funil
- material de cozinha;
- medidas de 100 ml[31];

Defendemos que as crianças tenham acesso a este material durante um período prolongado. Por outras palavras: o conceito de capacidade e de volume não se constrói numa série de aulas ao fim do terceiro período do 4º ano de escolaridade.

De preferência desde o pré-escolar, mas de qualquer forma a partir do início da 2ª fase as crianças devem ter acesso aos exercícios preparatórios.

Dienes agrupa estes exercícios em 6 séries de "*jogos*", para quem quiser.

1. Jogos com unidades não definidas.
   — ex. encher um recipiente grande com uma chávena.
   — elaborar listas do tipo:
   saladeira = 15 canecas = 30 chávenas frigideira = tacho, etc.
2. Jogos com uma série de unidades não definidas.
   — ex. 6 frascos do mesmo tipo mas de diferentes tamanhos;
   — relacionar os frascos entre eles.
3. Jogos com unidades não definidas com a mesma capacidade e formas diferentes.
   — ex. frascos de champô são excelentes para este efeito. Têm as

[31] Como medida "temporária: 1/10 dum litro, esta medida parece ser a apropriada para as crianças iniciarem as suas experiências (ver também Nuffield Matematics).

formas mais variadas (e enganadores) mas muitas vezes têm a mesma capacidade. (pode-se falar da publicidade, do “marketing”, de produtos que enganam)...

4. Introdução de medidas estandardizadas

   — ex. procuramos frascos e recipientes que contêm 1/4 l, 1 l, 1 dl, etc.

5. Medir com unidades cada vez mais pequenas.

   — ex. A partir de um tacho que leva 2,5 l será preciso introduzir 1/2 l

6. Jogos de trocas.

   — Com o apoio do material MAB pode-se trocar conjuntos de frascos ou tachos que têm capacidades idênticas. ou trocá-los individualmente contra cubos;

   — trocar volumes contra medidas estandardizadas: 1 l, 1/2 l, 1/4 l, 1 dl, 1 cl, etc.

Estas linhas só têm como objectivo "abrir o apetite”.

Estudar volumes e capacidades com os alunos pode ser uma atividade apaixonante. Deixamos aqui um momento de discussão que mostra que afinal é difícil imaginar que um dm^3 e um litro representem o mesmo volume. Os sábios que estandardizaram as medidas não tinham, certamente, filhos na escola primária.

Assim, pegando numa ficha de trabalho, alguém tem novamente dúvidas e por causa do…

... aquário...

(5º ano)

... um dia do ano escolar de 1980/1981 ...

… oiço: “Pascal já não sei mas afinal um litro é um m^3 ou um dm^3 ?

- Então! já não sabes? A embalagem de leite quanto media ?

Pois. O problema estava aí.

Mesmo depois de ter construído um m^3 e de ter verificado que cabiam doze crianças lá dentro. Como não tinha paciência para voltar a construir o contorno do m^3 com paus, fita-cola e cordel, olhei e vi… o aquário da sala.

- Então vamos lá outra vez. Lembras-te de quantos meninos cabiam no m^3 ?
- Sim, 12.
- Lembras-te de quanto mede o lado do m^3?
- Sim, 1 metro.
- O aquário mede 1 metro de largura, podes controlar[32].
- Sim…
- Achas que é maior ou menor que o m^3 que construímos?

O coro da retaguarda, já interessado no assunto, formula uma opinião unânime: é menor. Explicação: não cabem 12 meninos lá dentro.

- Agora, achas que podes vazar uma embalagem de leite lá dentro ?
- Siiim! Até há espaço que sobra.
- Então …

… e enquanto procuro formular a conclusão empírica deste momento de observação, diz João, responsável do aquário:

- Até cabem 12 litros!

E os outros:

- Deve ser mais, deve ser menos.

João teima com os 12. Já se prevê o resto: é prová-lo!

---

[32] Para quem gosta de fórmulas e problemas escolares: o aquário que recuperamos de um amador tinha 1 m x 3 dm x 50 cm.

Durante o recreio, João põe os peixinhos vermelhos num pequeno recipiente de vidro, despeja a água, deixa só a areia.

Depois vamos ver. Ele enche o aquário com 12 baldes de água. Viu!?

Então, alguém se lembra de observar que um balde é maior do que a embalagem de leite.

Sem falar de *dal* — não parece ser o momento oportuno para voltar aos prefixos gregos e romanos — constatamos que o balde tem lá dentro risquinhos e no 5º e no 10º os números 5 e 10. Serão litros? São … Portanto o aquário não leva 12 mas 120 litros de água (ou de leite, se quiser).

- Até leva mais!

A areia...

Pois, lá vai a água, lá vai a areia e começamos de novo: Se enchermos até transbordar, cabem 150 litros: 15 baldes de água. Entretanto o balde de reserva — fomos buscá-lo a turma do lado — está lá, cheio de areia.

A tentação é mais forte do que a razão.
Proponho: "E se enchermos o aquário de areia, quantos baldes é que acham que são precisos?"

A maioria aposta logo em menos baldes, uns 10-12 talvez.
Lá vamos: Esvaziar, encher, … e … cabem exactamente 15 baldes de areia no aquário!

É demais. Eles não acreditam nos seus olhos. Parece um aquário cheio de E.T.'s em vez de areia. E a ideia é tão simples: um balde cheio de areia ou um balde de água; são 10 litros a mesma.

Depois de os peixinhos ja terem reconquistado o espaço perdido, fica a questão: imagine que no mercado há dois vendedores que

vendem feijão, ambos ao mesmo preço, um vende-o ao litro, o outro ao quilo.
Onde será mais vantajoso comprar?

A planta da sala.

(2º ano)

Parte 1(19 de maio)

Desenhamos a planta da sala, depois de trabalhar a planta da horta. Esta foi medida com os palmos da mão e depois transferido para o papel, em que relacionamos dedos com palmos. Agora, medimos com fitas com graduações e os números até 50. Preparo um papel quadriculado em que será possível fazer uma redução para dez.

Fica claríssima que temos que fazer uma redução: se não o fizermos, a planta ficava com o tamanho da sala. Só podíamos colá-la no tecto!!! Por isso, estávamos a reduzir números.

E neste dia de 19 de Maio tínhamos tido esta discussão interessante:

"Como reduzir dez vezes as medidas para poder colocar as coisas no papel?"

Começamos por escrever:

- 10, dez vezes mais pequeno, = ...
- Há algumas propostas, 0, 1, 2, 20.
- 20 é posto de parte antes de discutirmos as propostas: é maior que 10.

- Com as réguas vemos que 10 vezes mais pequeno do que uma dezena é uma unidade.
  Portanto, 10 dez vezes mais pequeno = 1.

Avançamos com a notação $10 \times \frac{1}{10} = 1$

Eu: O que estamos a fazer ao tornar mais pequeno?
Margarida: Estamos a tirar.
Gisela: Não é bem isso.
Pedro: É meter.
Eu: Não, porque dez vezes mais pequeno, não pode ser meter.
Ana Paula: É dividir, porque é vezes.
Eu: Muito bem, podemos também escrever 10 : 10 = 1 e ainda, 10 X 0,1 = 1. É sempre a mesma coisa. Só que aquela última forma de escrever um pouco estranho é mesmo como no 4º ano.

Ana Isabel do 3º ano, está de visita na nossa turma e confirma que eles ainda não aprenderam. O entusiasmo é geral: já vimos uma coisa do 4º ano!

Decidimos utilizar a forma 10 : 10 = 1. Continuamos com 20 : 10.
Marlene: Pode ser 10?

Pego em duas regras de 10 e duas unidades e mostro-as a turma.
Ana Paula: São 18.
Eu: Porquê?
Ana Paula: (*Ao mesmo tempo*) Não, não pode ser, tem que ser 2.
Margarida: Ah, é um mais um.

Continuamos: 30 : 10 = .
Já há coro a acompanhar: 3. Quando chegamos ao 40:

Silvana: Isto é giro porque os números são de seguida.
Bruno: (*explode*) É a tabuada mas ao contrário!

Aproveitamos logo para completar a tabela de Pitágoras com os números até 100.

Arriscamos:

— E agora, como é para os 820? (o *comprimento medido da sala*)

Ana Paula: 28.

Eu: Penso que estás a ler o número ao contrário.

Núria: É 82! Pascal, é só tirar o 0.

Eu: Ouviram? A Núria acaba de descobrir o que um matemático muito famoso já tinha descoberto.

Gisela: O Pitágoras!

Eu: Não, ele viveu muito depois de Pitágoras. Ele dizia mais ou menos que dividir por 10 é tirar o 0 das unidades. Ele chamava-se – e vêm se não reconhecem o nome algures – chamava-se Al-Khowaridzmi. Era árabe.

Núria: É o mesmo nome que no pão dos algarismos[33].

Eu: Exactamente!

Um dos rapazes observa que já sabia isto tudo... dor de cotovelo? Agora podemos continuar. Na tabela, caçamos todos os números que tem um 0 nas unidades e reduzimo-los. Encimo do toque do recreio, pergunto o que fazemos com os outros.

Ana Isabel: (*do 3º ano*) Podia ser 3|3| para 33 e deixamos cair o 3.

Eu: Proponho voltar a falar depois do recreio, se quiserem.

Querem. Vamos trabalhar mais um quarto de hora em conjunto,

---

33 Uma discussão acerca das "*letras que escrevem os números*", que para nós são diferentes das "*letras que escrevem as palavras*", o que não era o caso para os Gregos no tempo de Pitágoras, fez-me escrever os vários algarismos no quadro, cercando-os por um elipse achatado e comprido. Núria, que esteve na França viu no desenho um "pão como na França". Ficou o registo na sala do "pão dos algarismos".

antes do trabalho de plano (estudo autónomo).
Marlene: O 64|1|dá 64 e 0 2|4|da 2.
Eu: Cuidado agora, o 79, está mais perto de 70 ou de 80?

Conferimos no prédio dos números.
Ivan: Mais perto de 80.
Silvana: Então fica 8.

---

parte 2.(25 de maio)

Com o prédio dos números percebem que do 1 ao 4 nas unidades, a dezena mais próxima é inferior, e que de 6 até 9 a dezena mais perta é a superior. O 5 é um problema:
Hugo: É antes e depois ao mesmo tempo.
Bruno: É mais e menos.
Paula: É entre os dois.
Ivan: É como o 5 para o 10 com as réguas.

Combinamos não tirar, nem pôr, mas fazer uma marca especial: a redução fica em 7|5|
No fim da sessão, a tabela ficou assim:

O quê	numero encontrado	redução
Comprimento sala	820	82
Largura sala	641	≈ 64
Mesa	50; 109	5; ≈ 11
Cadeira	33; 36	≈ 3; ≈ 4
Tapete	147; 190	≈ 15; 19
Armário	50; 75	5; 7|5|
Canto pintura	200;100	20; 10
Mesa grande	150; 80	15; 8
Armário computador	88; 49	≈ 9; ≈ 5
Armário biblioteca	96; 79	≈ 10; ≈ 8

No dia 26-05-00, vamos para uma manhã longa de construção da planta da sala com o resultado que se vê:

Figura 5: as propostas para a planta da sala.

Vamos de autocarro para Coruche

(3º ano)

Quinta-feira, 10 de Maio, vamos visitar uma quinta, em Coruche. O autocarro da quinta vem nos buscar às 9.00 horas. Mas quanto tempo é que vamos andar de autocarro?

Ninguém sabe. Para já, não sabemos onde fica Coruche.

Uma pesquisa no mapa rodoviário que está, desde o ano passado, afixado na sala, ensina-nos que Coruche fica perto do Tejo, entre Santarém e Montemor-o-Novo.

Algumas tentativas de contar quilómetros falham, pelo que estamos muito contentes que Andreia, estagiária na nossa sala, nos esclarece: Coruche fica a 110 km de Lisboa.
E Andreia avança com outro dado: um autocarro tem limitações de velocidade, pelo que ela supõe que não andará muito mais rápido do que 50 km por hora.

Com isso, o problema está lançado: vamos tentar calcular o tempo que vamos precisar.

Andreia passa um esquema no quadro que Ruben reproduz mais ou menos num bocado de papel de rascunho, (*figura 6*) e que vários outros também utilizam.

Figura 6: Ruben trabalha a partir de um esquema.

Como sempre, ouvimos os pequenos grupos a discutir:

Paula: Deve ser uma conta de mais.

Gisela: Não sei, porque são quilómetros e minutos.

Ivan: Isto é fácil: é só ver as horas, é mais ou menos dois. Chegamos lá por volta das 11.

Andreia: Mas gostava de saber exactamente quanto tempo levaremos.

Pedro: Isto não é fácil, não sei.

Ana Margarida: Espera, se é 50 km por hora, numa hora faz 50 km. Em duas horas faz 100 km.

Adramane: Mas são 110, não dá certo.

Andreia: Vai ser mais ou menos tempo?

Ana Margarida: Vai ser mais.

Ruben está a trabalhar sozinho: "Andreia, uma hora são 60 minutos, não é?"

Ele escreve 50 50 10 e depois

1 hora → 60 minutos, e depois

60 minutos → 50 km

e fica parado.

De repente, diz: já sei, e divide 50 por 5

Anuncia baixinho à Andreia: "É 12. São duas horas e 12 minutos."

Ana Paula: Não é conta de mais não. É assim: 110 - 50 e depois outra vez, mas sobra 10.

Gisela: Então é duas horas. Mas é mais.

Figura 7. *É assim: 110 - 50 ...*

Entretanto, Ivan também já dividiu 50 por 5 para dar 10.

Tiago está a perceber, mas Pedro, Bruno e Rui continuam ser ver onde que isto os leva.

Ana Margarida: Ah! Só se dividir por 5. 50 : 5 dá 10, agora é dividir 60.

Figura 8. *Ah! Só se dividir por 5...*

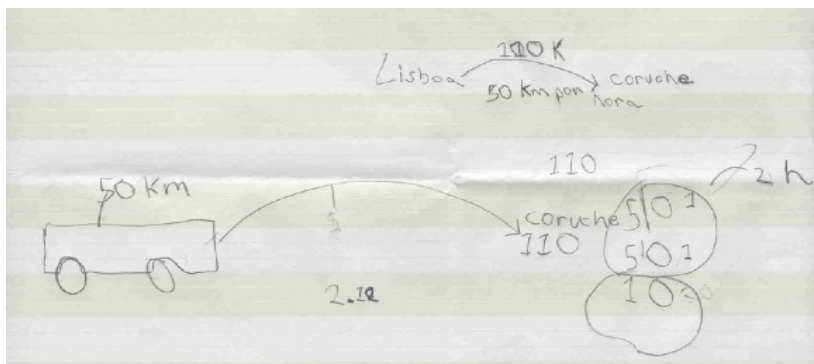



Figura 9. O esquema de Marlene só precisava da tabela de Pitágoras ...

Marlene vem ter comigo, porque prefere falar com Pascal do que com Andreia.

Traz a grelha de Pitágoras e aponta para o 50 e diz:

Marlene: 50 no 5 é 10 né, mas 60 não está.
Tenho que fazer em partes?
Eu: Experimenta.
Marlene: 50 dá 10 e 5...
Eu: Quanto é que sobra, do 60 para o 50?
Marlene: Sobra 10. Ah então é dois, é doze.

Muitos estão de acordo que encontraram a solução.
Andreia recapitula:
– Então, 110 km é 50 km + 50 km + 10 km.
Ivan: E numa hora faz 50 km.
Ruben: Em duas faz 100 km.
Ana Margarida: Temos que dividir o 60.
Eu: Porquê?
Ana Paula: Para encontrar o resultado.
Eu: Está, mas porquê é que a Ana Margarida fala agora de 60.
Gisela: Ó Pascal, porque 1 hora é 60 minutos.
Eu: Ai é?
Vários: É, É.
Eu: Têm a certeza? Não é 50?
Muitos: Não!
Tatiana Helena: É! Não é!
Eu: Mas vamos ver: há unidades, dezenas e centenas. Têm a certeza que uma hora não é 10 ou 100 minutos?
Todos: É 60.
Eu: Agora, explicam-me aquela divisão.
Ana Margarida: O Pascal ainda não percebeu.
Eu: Não. Além de ser lento, não fui eu que trabalhei o problema com vocês, portanto estou um pouco confuso.

Ruben: Então, e assim, né. 50 né. Não 10. 10 é 50 mas dividido por 5, né. Dá 10. Então é também 60 a dividir por 5 né. Então dá 12. Porque também dividi por 5.

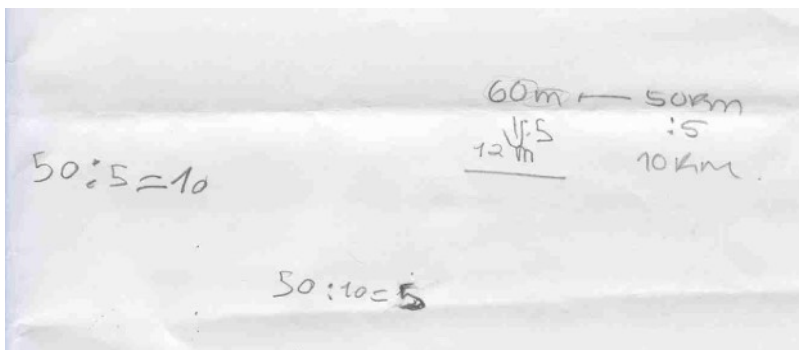



Figura 10. A cábula de Ruben para explicar as duas divisões por cinco.

Eu: Portanto divides km, e divides minutos e está tudo certo?

Gisela: Sim. km dá km, minutos dá minutos.

Fica então um esquema no quadro:

50 km ⟶ 1 hora (60 minutos)
50 km ⟶ 1 hora (60 minutos)
10 km (50 km : 5) ⟶ 12 minutos (60 minutos : 5)
110 km ⟶ 2 horas e 12 minutos

Marlene: Então, chegamos às 11 e 12.

Eu: Agora, partimos do princípio que o autocarro anda 50 km por hora.
Pode ser que o motorista anda pela autoestrada, onde pode andar mais depressa, e que afinal chegamos mais depressa.
O que podemos fazer para ver se estávamos certos?

Ana Paula: Ver no relógio, quanto tempo levamos, na quinta-feira.

Eu: Boa, e depois poderemos calcular qual foi a velocidade real do autocarro.

Vamos ao trabalho de plano. Retomaremos a conversa de aqui uma semana.

Terça-feira, 15 de Maio de 2001

Por um momento, pensámos que não íamos continuar o problema, porque surgiu outro: uma reunião sindical, conjugada com duas colegas doentes faz que dos 9 professores, (4 em regime normal e 5 em regime duplo–manhã), só três estão presentes. Depois de tratarmos de algumas pequenas confusões, conseguimos combinar o plano de trabalho para o dia, e decidimos continuar o problema, depois de reler o 4º acto do nosso teatro. Tiago, Adramane e Tatiana Filipa não estão. Em compensação, hoje temos muitas "visitas"…[34].

Iniciamos a nossa discussão. Na realidade, saímos de Carnaxide às 9:20, depois de um falso arranque às 9:15 — parámos outra vez por causa de um menino que chegou atrasado.

Chegamos à Quinta às 10:50.

Continuamos a assumimos que foram mesmo 110 km. Ninguém se lembrou de verificar com o motorista.

São duas perguntas:

1. Quanto tempo demorámos a chegar, na realidade?
2. Qual foi então a velocidade média real do autocarro?

A terceira pergunta, que tem a ver com a demora, na volta (saímos de Coruche às 16:45 e chegamos à escola às 18:30), ficará para ser discutido mais tarde, visto a nossa agenda carregada.

Ana Margarida: Levámos 1h30.

Eu: Como calculaste isso?

---

[34] … como costumamos designar os colegas de outras salas que vêm ter connosco quando o professor deles não está.

Ana Margarida: de 20 para 50 são 30. De 9 para 10 é 1. Portanto é uma hora e trinta minutos.

Marlene: Nós já encontrámos.

Ana Paula: Marlene encontrou.

Marlene: Das nove às dez e cinquenta é uma hora e cinquenta minutos. Mas é preciso tirar 20 porque era às 9h20 que saímos. Dá 1h30.

Ivan, Hugo e Bruno, estão em apuros. Pensam que é 1h50, porque faltam 10 minutos para as 11 horas.

Faço-lhes um pequeno esquema:

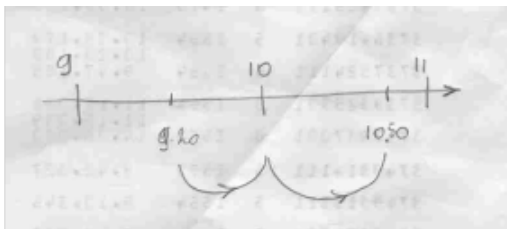



Figura 11 esquema de apoio para Ivan, Hugo e Bruno.

Ivan: Ah! Agora já vi.

E ele completa, com a minha ajuda:

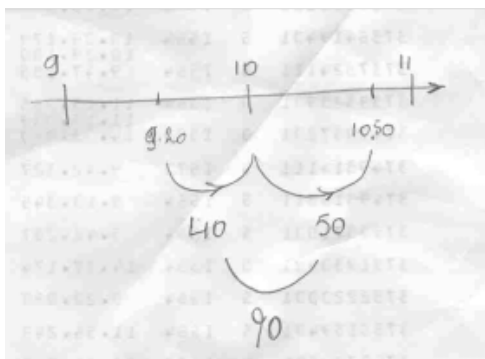



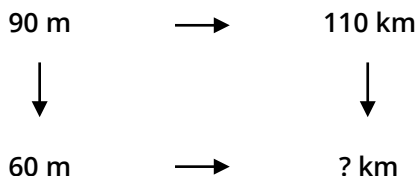
Figura 12. Esquema completado por Ivan.

Para arrancar com a segunda parte, estamos mais confusos.

Ana Margarida está a procura de duas horas, que são 60 + 60 e conclui que dá 120 km. Mas acha que não está bem.

Ivan tira 60 de 90, o que dá 30, depois do qual tira 30 de 110 e diz que o autocarro andou a 80 km por hora.

Ruben desconfia que andar durante 60 minutos não diz qual é a velocidade do autocarro. Tenho que explicar que quando dizemos “O carro anda a 100”, que isto significa, “o carro anda a 100 km por hora”. Alguns afirmam.

Desenho no quadro:

E pergunto:

– Isto faz lembrar o que?

Ana Margarida: É para fazer contas com a grelha.

Eu: Qual?

Gisela: …de andar para frente e para tràs nas casas.

Eu: Tens a certeza?

Ana Margarida: Espera! É da grelha.

Gisela: É da grelha de Pitágoras.

Bruno: Então e de dividir e de vezes.

Eu: De vezes?

Gisela: De dividir e de multiplicação.

Eu: Então

Marlene: (*com calculadora na mão*) Já encontrei uma coisa: 90 a dividir por 60 dá 15.

Eu: Não tenho a certeza que é isto que a máquina diz. Mas podem ir buscar as máquinas de calcular.

(*Depois de estarmos novamente sentados*)

Reparem bem nos números. Já dizemos que temos que multiplicar ou dividir. Agora, temos que passar de 90 para 60. Será dividir ou multiplicar?

Ana Margarida: É dividir.

Eu: Porquê?

Hugo: Porque 60 é mais pequeno.

Eu: Pois. Como aqui temos números sem vírgula, para passar para o mais pequeno, dividimos. As vezes acontecem coisas esquisitas com os números, mas aqui não é o caso.

Marlene: Não é 15 é 1,5.

Ana Paula: Isto é o quê?

Tatiana Helena: É 1 vírgula 5?

Bruno: É 1 e meio.

Eu: Então 90 : 60 = 1,5. E 90 : 1,5?

A audiência experimenta: Dá 60.

Eu: Lembrem-se: 12 : ____ = 4.

Qual é o número que falta?

Ivan: É 3.

Eu: Porquê?

Marlene: Porque 12 : 4 = 3.

Ana Margarida e Marlene dividam 110 por 1,5 e a Marlene diz:

\- O autocarro andou a 73333333.

Eu: Certeza?

Ana Margarida: Não, é 73,333333

Bruno: Hein?

Mostro no quadro, acompanhado por um diálogo:

E volto para o outro esquema:

— Se divido 90 para obter 60, divido por 1,5. Se quero diminuir da mesma maneira, do outro lado, divido por quanto?

Bruno: Por 10?

Eu: Vejam bem: neste exemplo, divido por 10 dos dois lados do sinal =. Aqui, se divido de um lado da seta por 1,5, por quanto é que divido do outro lado?

Bruno: Também por 1,5.

Eu: Então vejam o que isto dá.

Pedro, Bruno, Ruben: Dá a mesma coisa que a Marlene e a Ana Margarida.

Eu: Portanto, qual foi a velocidade do autocarro?

Vários: 73 km (*por hora*).

Eu: E?

Ana Margarida: e qualquer coisa.

Eu: Voltaremos a trabalhar um problema parecido mais tarde.

A viagem do Eddy

(3º ano)

Chegou Eddy, o professor Belga da turma com que fazemos correspondência internacional.

Ele veio para nos explicar como podemos melhorar a nossa pági-

na na rede, e como podemos elaborar pequenas apresentações no computador da sala.

Com Ruben, que podia traduzir do Inglês para o Português, e com algumas traduções simultâneas da minha parte, conseguimos discutir entre nós.

Entretanto pedimos também a que horas é que Eddy saiu de casa para vir cá e a que horas é que voltava. Depois, vimos o seu bilhete de avião, e é lá que as coisas se complicaram. Decidimos discutir o problema:

> *O Eddy saiu de Bruxelas às 10:15 e chegou às 12:05 em Lisboa.*
>
> *Na volta, sai às 9.35 e chega em Bruxelas às 13.25.*
>
> *Ele disse que a viagem demorou 2.30.*
>
> *Como é que isto é possível?*

Falámos sobre como íamos abordar o problema.

Marlene pensa que é uma situação de mais ou menos.
Ana Margarida contesta. Não é mais ou menos, tem que estar certo.
Marlene começa a rir. Ela queria dizer de + ou de -. (*Ela mostra os sinais no ar*).

Concordo que poderá bem ser necessário fazer algumas somas ou algumas subtracções. Aviso que é preciso ter cuidado porque estamos a calcular horas e minutos.

Mário Sérgio: Posso fazer com a máquina calculadora?
Eu: Podes!

Mário apresenta 22,20 e não sabe o que tem que fazer com isso.

Ivan: Como fizeste?
Mário: 10,15 + 12,05.
Ivan: Não pode ser. Ele não passa 22 horas no avião. Disse que só foram 2 horas e meia.

Eu: E cuidado! 10,15 não é a mesma coisa que 10:15. Uma hora não tem uma centena de minutos, só tem 60.

Ana Margarida: Então não se pode fazer com a máquina.

Leila: Pode, mas não assim.

Não continuo a discussão com este grupo, porque o Ruben está a chamar:

— O avião mudou de horas?

Eu: Mas já sabes quantas horas é que o Eddy levou para chegar cá?

Ruben: É o número de horas que esteve no avião.

Eu: Agora controla se foi mesmo 2:30, como o Eddy disse.

Marlene: Já! O avião é assim, sai mais tarde, né, e depois, né, chega mais depressa.

Ana Paula: Não percebo nada.

Marlene: É o horário do avião que estava mais diferente.

Gisela: Já não percebo nada. Uma hora é 15 ou é 30?

Eu: O que estás a dizer?

Gisela: Sim. Temos aqui 15 e 25 e 05, e já não sei. Ah! Não, uma hora é 60, não é?

Marlene: Penso que a hora estava "marrada".

Eu: O quê?

Marlene: Que estava "amariada" ou o quê.

Ana Paula: Que estava avariada.

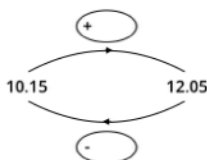
Margarida chama:

— A Leila e eu pensamos que não é possível.

Eu: O que não é possível.

Ana Margarida: As horas. É tudo diferente

Leila: Somamos, mas não dá nada.

Proponho, no quadro, o esquema:

Ana Margarida: Então, foi 2 horas e 70

Ivan: Não, foi 2 horas e cinquenta, não foi 2 horas e meia, não foi 1 hora e cinquenta.

Eu: Pronto. Agora na volta?

Marlene: Vê! Eu disse! As horas não são as mesmas.

Tatiana Helena: Ah! É como em Cabo Verde. É diferente a hora.

Eu: Então, na volta, qual é a diferença?

Gisela: A diferença Pascal?

Eu: Sim, a diferença.

Lembro e aponto o pequeno quadro que fizemos para nos lembrar do vocabulário essencial para perceber os enunciados de muitos problemas nas fichas e nos livros:

símbolo	Operação	Resultado
.. + ..	adição	soma
.. - ..	subtração	diferença
.. x ..	multiplicaçao	produto
.. : ..	divisão	quociente

Ivan: É estranho. Agora é 3horas e cinquenta minutos.

Adramane: Mas foi 2 horas e 30. Foi o que ele disse.

Eu: Talvez Eddy só contou o tempo de vôo, e no bilhete vem também o tempo que se anda a entrar e a sair do avião.

Mário Sérgio: Deve ser isso.

Entretanto, o Eddy arredondou ligeiramente os tempos e, voltando para as duas horas e meia, fez um esquema no computador, que aproveito imediatamente:

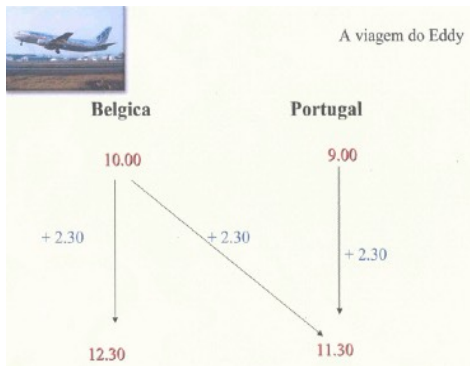



Figura 12. Esquema da viagem Bruxelas - Lisboa

Marlene: Parece que é uma hora e meia, mas não é. É porque em Portugal a hora era já diferente.

Ruben: Como?

Eu: Quando o Eddy saiu da Bélgica, para ele eram 10.15, mas para nós ainda só eram 9.15.

No caderno ficam algumas conclusões:

5 Junho 0 1 Problema

Ruben

O Eddy saiu de Bruxelas às 10.15, e chegou à Lisboa às 12.05.
Para voltar saí às 9.35 e chega às 13.25 Passou 2 30 no avião
como é que isso é possível?

1. Levou 1h50 de Bruxelas até Lisboa.

2. Leva 3h 50 de Lisboa ate Bruxelas

3. Isto é porque a hora lá é diferente de aqui

4. Afinal, foram 2h50 de viagem

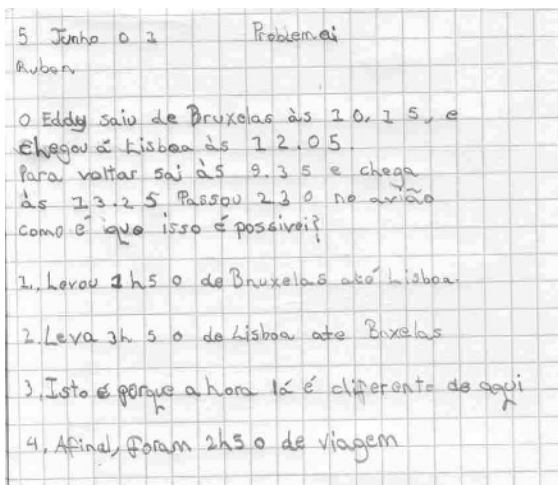



Figura 13. notas de Ruben

O plástico estragado

(3º ano)

Na semana do 19 de Fevereiro, durante um tempo de trabalho autónomo, Rui abusou do plástico autocolante. Para plastificar um bonequinho de tamanho minúsculo, utilizou aproximadamente meio metro de plástico em toda a sua largura.

Obviamente, no Conselho, foi falado. Aparentemente, envolveu também Hugo, talvez Ivan — que não estava e depois provou não estar envolvido —. Quando pergunto o que Ruben, que tinha levantado a discussão, sugeria fazer, ele não conseguia ir além de uma proposta de castigo, o que não trazia o plástico de volta. Foi então que Tiago se lembrou, que quem estraga leite, paga uma multa de 20 escudos à turma. Porque não pedir ao Rui e ao Hugo para pagarem o plástico estragado?

Todos concordaram e Gisela, contabilista da sala quer saber se têm que pagar cada um 20 escudos, ou se pagam 20 escudos em conjunto. Eu pergunto porquê 20 escudos, e há quem olha para mim sem perceber: então, a multa não é 20 escudos?

Pergunto se é para pagar uma multa, ou se é para pagar o que foi estragado. Confirmam que é o que foi estragado.
Então, digo, será preciso procurar quanto custou o plástico que estragaram. O Conselho concorda fazer disto um problema para trabalhar em conjunto.

As férias de Carnaval entremetem-se, e na planificação da semana do 5 de Março, combinamos um momento para trabalhar o problema. Dia 8, escrevo então no quadro:

> *Um rolo de plástico de 15 metros custa 1800$00 (na verdade 1735$00, mas arredondei). Rui e Hugo estragaram mais ou menos ½ metro. Quanto é que têm que pagar à cooperativa?*

Digo que podem discutir entre eles e fazer esquemas e grelhas nos cadernos.

Leila desenha uns riscos. Gisela olha para a folha, sem saber como pegar. Hugo faz desenhos de rectângulos de tamanhos diferentes.
Marlene e Ana Paula escrevem 800 + 500 = 1300 e dizem que não é 500. Não sabem explicar porque começaram com 500 e 800.

Leila tem agora desenhado um rolo, com 15 m escrito lá dentro, e outro ligeiramente mais pequeno com ½ metro escrito lá dentro.
Ruben sabe que é preciso ver se ½ metro cabe em 15, mas não sabe como o fazer.

Entretanto Ivan e Gisela fizeram uma subtração: 1800-15=1785. Não sabem o que fazer com o resultado. Mostro-lhes que estão a tirar metros de rolo de escudos, e que isto é um pouco esquisito.

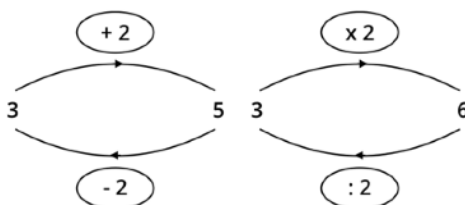
Hugo tem uma ideia: ½ é metade, portanto é 800. Pergunto porquê. Ele responde: "Porque 800 é a metade de 1800". Tiago diz que não, que é 900. Respondo que acho uma boa ideia, de procurar quanto vale a metade, mas que não se trata da metade do rolo, mas da metade de um metro.

Ruben tenta com 13 ½, porque... pois porque o quê?
Ivan pede uma máquina de calcular para multiplicar 18 por 900, mas quando começa a multiplicar, já não sabe porquê. Marlene pensa que é com o 15. Ela diz que um metro custa 270 escudos, porque é 18 vez 15.

A grande luz vem de Ruben: "Não é vez, é vezes menos!"
Pergunto o que ele quer dizer.

Ele responde: “O rolo de 15 metros custa 1800. Então 1 metro é 15 vezes menos.”

Entretanto Tatiana Helena tem um pensamento paralelo. Ela está a desenhar bonecos: cada dois bonecos “estragam” um metro, cada boneco ½ metro portanto. Pergunto quantos bonecos é que ela tem. Ela diz: “29.” Peço que controla, e Ana Paula começa a ajudá-la.

Ruben e a Marlene estão em apuros com o “vez menos”.
Lembro-os dois esquemas das operações inversas:

Tatiana e a Ana Paula concluíram: são 30 bonecos.

Peço a atenção do grupo todo e peço a Tatiana para dizer o que ela fez.Desenho os bonecos dela no quadro, e concluímos:
O rolo custa 1800 escudos. Metade de um metro custa 30 vezes menos.

Com o esquema que desenhei para Ruben e Marlene ainda no quadro, é fácil controlar que “*vezes menos*” não é “*menos*”, mas que é “*dividir*”.

De repente temos duas soluções:
- Solução de Tatiana Helena e Ana Paula: 1800$00 : 30 = 60$00
- Solução de Ruben, Marlene, Leila e Margarida:
  - 1800$00 por metro : 15 metros = 120$00.
  - ½ metro custa a metade de um metro, ou 120$00 : 2 = 60$00.

Gisela está, mesmo assim, um pouco surpreendida que dá a mesma coisa...

Rui e Hugo irão portanto, entre os dois, pagar 60$00.

Discutimos o problema durante 1 hora...

Horários e fusos

(4º ano)

Com a possibilidade cada vez mais real que a nossa viagem à Bélgica se realiza, os problemas na turma tendem para viagens, preços e horários.

Hoje, apresentei a seguinte situação:

Em Lisboa leio

destino	saída	chegada	duração vôo
Bruxelas	11:00	14:30	2:30
Londres	11:00	13:30	2:30
Nova Iorque	17:00	20:00	8:00
Moscovo	14:00	19:00	3:00

Pergunto: Porquê que a chegada em Bruxelas e Londres não é à mesma hora?

Marlene: Porque têm horas diferentes.

Gisela: Porque têm aviões diferentes.

Eu: O que queres dizer Marlene?

Marlene: Bruxelas não tem a mesma hora que nós, e em Londres também não, porque não é Lisboa.

Ivan: Não, em Londres é a mesma hora.

Ruben (*que viveu muito tempo em Londres*): É a mesma hora, de Bruxelas é que já não sei.

Eu: Então, pelo tempo de voo, não podemos saber se a hora é igual ou diferente?

Margarida: Espera aí, Pascal, a chegada é a hora de lá ou de Lisboa?

Eu: A hora do destino.

Rui: E a saída?

Bruno: Deve ser de Lisboa?

Eu: É. Então?

Marlene: … de 11:00 às 13:30 são mesmo duas horas e meia.

Escrevo 11:00 + ... = 13:30 ➔ 13:30 – 11:00 = 2:30

Ana Paula: Então Londres é com a mesma hora que Lisboa.

Ruben: Vês, já tinha dito!

Eu: E agora, Bruxelas?

Margarida: Bruxelas é mais uma hora, não menos uma hora, não espera...

Sérgio: É mais uma hora, porque é 14:30 e senão era 13:30, então lá é mais uma hora.

Eu: Agora a minha segunda pergunta. Olhando para a duração de voo, vocês descobrem qual é a diferença de horas com Nova Iorque e com Moscovo?

Bruno: Moscovo fica aonde?

Eu: É a capital da Russia.

Formam-se em pequenos grupos de discussão.

Ana Paula: É diferente, mas não sei como.

Marlene: É fazer contas, com os 20:00...

Leila: Com os 20:00 não, isto é da chegada.

Marlene: Então e a gente não quer saber quando chega?

Margarida: Não, quer saber qual é a diferença de horas.

Sérgio: Penso que é cinco, mas não sei porquê.

Ivan: Não é, é 8.

Adramane: 8 é o tempo de voo.

Ivan: Então?

Bruno: Não, porque em Bruxelas também não é porque é dois e meio, porque então era 13:30.

Ivan: Hein?

Bruno: É, não é porque o avião chega às 14:30, que é dois e meio.

Adramane: Em Bruxelas é uma hora mais tarde, foi isso que o Pascal disse.

Sérgio: Mas é cinco, porque senão era vinte e cinco e é vinte.

Eu: Explica melhor.

Sérgio: 17:00 mais 8:00 é 25:00, mas em Nova Iorque é 20:00, então a diferença é 5:00.

Eu: Escrevem isso, e procuram como é para Moscovo.

Tiago: Não é assim. É 20 menos 8.

Hugo: Não é. É vinte mais oito.

Eu: Porque é que dizem isto?

Hugo: Porque é quando o avião voa, portanto é mais.

Eu: Sim. O tempo avança. Mas qual é a hora de saída?

Hugo: É 17, mas penso que em Nova Iorque é 20.

Eu: Mas se pensas a partir de Nova Iorque, tens voltar para trás, e então o Tiago tem razão, tens que tirar 8 horas.

Hugo: Mas não pode ser, porque então aqui é 12.00

Eu: Pois. 12:00, são as horas em Nova Iorque, quando o avião sai aqui.

Hugo: Ah! Então são cinco.

Eu: Cinco quê?

Hugo: Cinco de diferença.

Eu: Continuam agora para Moscovo.

Ana Paula: Para Nova Iorque são cinco.

Eu: Porquê?

Ana Paula: Foi a Marlene que achou.

Eu: Mas como?

Gisela: Porque 17:00 mais 8:00 dá 25:00

Marlene: Isto não existe, é uma da manhã.

Margarida: É, mas é 5 de diferença com o 20:00

Eu: Então e para Moscovo?

Leila: É duas horas.

Eu: Porquê?

Leila: Porque tem que chegar às 17:00 e só chega às 19:00

Eu: Agora com todos. Já descobriram como é. São cinco horas de diferença com Nova Iorque e 2 com Moscovo.
E em Nova Iorque é mais cedo ou mais tarde?

Marlene: Mais tarde.

Eu: Porquê?

Marlene: Porque aqui é uma da manhã e lá são vinte, que é oito.... eeh...

Ivan: Não é não. Aqui é uma da manhã, mas da manhã a seguir.

Margarida: É o que disse, o número é maior.

Hugo: Então se lá é 12 quando aqui é 17, tem que ser mais cedo.

Ana Paula: O número é mais pequeno...

Eu: E para Moscovo?

Rui: O número é mais grande.

Ivan: Maior

Rui: Sim, maior.

Eu: Então?

Vários: É mais tarde.

Eu: Mas concluímos agora: Em Nova Iorque é cinco horas mais cedo do que aqui, em Moscovo duas horas mais tarde. Por-

tanto a diferença de hora entre as duas cidades é de quando?

Vários: … de 7 horas.

Passamos uns três quartos de hora animados, neste dia 31 de Janeiro de 2002.

Viagens de avião e de autocarro

(4º ano)

28 de Fevereiro de 2002, 9:45. Proponho a seguinte situação:

A distância Lisboa – Bruxelas é pelo ar aproximadamente 1750 km. Pela estrada é aproximadamente 2160 km.
Um avião tem uma velocidade média de 700 km / hora. Um autocarro tem a velocidade média de 90 km / hora.
Quanto tempo de viagem leva o avião?
Quanto tempo de viagem leva o autocarro?
As carreiras de autocarro Lisboa Bruxelas tabelam 36 horas. Onde está a diferença com o que calculaste?
A ultima vez que fui à Bruxelas de avião, entrei no aeroporto de Lisboa às 11 horas, saí do aeroporto de Bruxelas cinco horas mais tarde. Porque será?

Antes de discutir em pequenos grupos, há alguns comentários.

Ivan: Pascal, estas distâncias são verdadeiras?

Eu: São aproximações. Alterei um pouco para facilitar.

Sérgio: É muito diferente pelo ar ou pela estrada.

Eu: Porque será?

Paula: Pelo ar, voa se por cima dos países.

Eu: E?

Rui: Pascal... não esquece.
Eu: Diz, Rui.
Rui: O avião vai mais directo.
Gisela: Claro, o avião não tem que andar pela estrada.
Ruben: Há montanhas com muitas curvas.
Sérgio: Como se sabe as distâncias, antes de voar?
Eu: O que pensam?
Gisela: Vê se nas placas.
Ruben: No avião não há placas!
Gisela: Mas na estrada há.
Ruben: Mas não serve para o avião!
Margarida: Vê-se nas plantas. Ou nos mapas.
Gisela: Como assim?
Eu: Podemos calcular as distâncias. Depois da Páscoa, quando trabalhamos mais sobre a viagem, ensino-vos como se faz. É engraçado.

O grupo começa a pensar no problema. Circulo entre os grupos, oiço e intervenho de vez em quando.

Bruno: Mas Pascal, já sabemos que o avião é duas horas e meio.
Paula: Pois, já fizemos isso. E tem mais uma hora, porque é para Bruxelas.
Pascal: Não baralhas. Bruno, eu sei que já sabemos... mas o que quero, é que vocês provam, com estes dados aqui, que também chegamos a duas horas e meio.
Gisela: Como assim?
Pascal: Pensa um pouco. A distância, e quanto é que o avião faz por hora.
Paula: O avião faz em duas horas e meio porque voa.

Pascal: Está bem, mas porque duas e meio, e não três ou quatro ou cinco?

Paula: Porque é até Bruxelas. E já sei que é duas e meio.

Pascal: Está bem, Paula, mas agora, pensa um pouco sobre os números que estão aqui.

Marlene: 1750 + 700 = 2450.

Naomi: Já encontramos?

Pascal: O que fizeram?

Marlene: Uma conta de mais.

Pascal: Mas porquê?

Marlene: Porque são os números.

Pascal: Percebo. Mas o que pensaram?

Marlene: ??.

Pascal: Quantos km's é que avião faz por hora?

Marlene: 700 km

Pascal: E quantos km's tem que fazer?

Marlene: Ah! Não diz mais nada Pascal. Já sei. Tenho que fazer aquilo, menos, não, vez menos, dividir!

Pascal: Ok. Vêem se encontram o resultado. Para o autocarro o raciocínio é parecido.

Ivan: Temos que dividir.

Sérgio: 2160 por 700.

Pascal: Têm a certeza?

Ivan: É dividir, é.

Adramane: É Pascal.

Pascal: Mas porquê 2160?

Ivan: Porque... ah! Espera!

Sérgio: Não é não, do avião é 1750.

Adramane: Mas não são 2160 km para ir a Bruxelas?

Ivan: No ar não são.
Pascal: Então acabam este.

Bruno: Penso que já encontrámos Pascal!
Hugo: É duas horas e meio!
Tiago: É, Pascal?
Bruno: É!
Pascal: Pois, mas como é que pensaram?
Hugo: Então é 1750 a dividir por 700, e isto dá 2,5.

Adramane: 1750 – 700 = 1050. 1050 : 700 = 1,5. 1,5 mais a primeira hora = 2,5.
Paula: Isto dá 2:50 e não 2:30.
Marlene: Não dá 2 ½ .
Ivan: 2,5 é a mesma coisa que 2 ½.
Margarida: Então é mesmo 2:30.
Ivan: É, porque uma hora é 60 minutos, e então 0,5 não é 50 mas metade de 60 que é 30.
Pascal: Então, o autocarro?
Marlene: Nós já fizemos: dá 24.
Ivan: 24 é um dia inteiro.

Pascal: Agora, as duas outras perguntas.
Paula: 36 é mais que 24.
Marlene: Isto é fácil.
Mário: Deve ser porque o autocarro para no caminho.
Pascal: Porque será?
Bruno: Ah! É como nas excursões.
Pascal: Porquê?
Ruben: As pessoas tem que comer e fazer chi chi.
Pascal: Então 36 horas, é quanto em dias?
Ivan: É um dia e 12 horas, ah! ... é um dia e meio.

Marlene: É mesmo Pascal?

Pascal: Não sei muito bem. Fiz esta pergunta mais para mostrar que sabemos coisas, só pensando nelas, mesmo se não faz parte dos dados do problema. Mas podemos procurar numa agência de viagem, quanto tempo os autocarros levam efetivamente.

Gisela: O que isto quer dizer, efetivamente?

Pascal: De verdade, na realidade, de facto. E os cinco horas de viagem de avião?

Marlene: Tem que se entrar, mostrar o passaporte, fazer aquelas coisas com as malas, tem que se esperar que as malas venham.

Pascal: Pois. Estão a ver que o tempo de voo ou de estrada é diferente do que o tempo de viagem. Vamos ainda voltar a falar disso.

São 10:30, vamos para o recreio.

Números e operações

A avó do Ivan faz anos.

(2º ano)

Ivan conta, na ronda de contar e mostrar, no início do dia, que foi aos anos da avó.

Pergunto-lhe se ele sabe que idade é que ela tem.

"Sei, tem 49 anos."

"E a tua mãe? Sabes?"

"Sei. Tem 27."

"E tu? Tens 7?"

"Tenho."

Escrevo estes três valores no quadro: 7 27 49.

Peço a diferença de idade entre Ivan e sua a mãe.

Depois de pensar algum tempo, o próprio Ivan diz:

— 20.

Eu: Como fizeste?

Ivan: Fiz a conta.

Como ele não consegue explicar o raciocínio, mostro como o prédio dos números pode ajudar: ir de 7 para 27 é descer dois andares. Cada andar é 10, portanto são vinte.

Depois, pergunto:

— Quantos anos de diferença há entre a mãe do Ivan e a mãe dele?

Gisela: 22! (*Ela responde imediatamente e aponta o caminho no prédio dos números*).

Escrevo:

	Ivan	7
20		
	mãe	27
22		
	avó	49

Eu: Que idade tinha a mãe do Ivan quando ele nasceu?

Algum tempo de pensar...

Bruno: Tinha vinte.

Ivan: É o número que está entre o meu nome e a mãe.

Eu: Muito bem! Então e que idade tinha a avó do Ivan quando nasceu a mãe dele?

Vários: 22.

Margarida: Esta última já não era difícil, Pascal".

A carreira 14

(3º ano)

O "14" leva uma hora e 20 minutos para chegar ao Rossio. A tabela diz que há um autocarro de 20 em 20 minutos. Quantos autocarros é que a Carris tem que pôr nesta carreira?

Peço a todos para dedicarem algum tempo, pensando neste problema.

Paula acha que são 75: 14 + 1 + 20 + 20 + 20. Somou os números todos que encontrou.

Pergunto se se junta o n.º da carreira à hora, para saber um

número de autocarros.
"Claro que não", é a resposta.

Margarida pergunta se há um autocarro que sai do Rossio ao mesmo tempo que um sai da Outurela.
Digo que isto pode ser uma primeira pista.
Vejo nalguns papeis tentativas deste tipo:

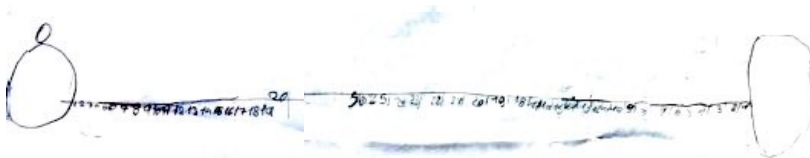



Figura 14. De Outurela para o Rossio

De seguida, a Gisela pergunta:

- Oh! Pascal, uma hora são 60 minutos, não é?
- Sim.
- Então o autocarro faz 80 minutos para cada viagem.

O croquis simplifica-se:

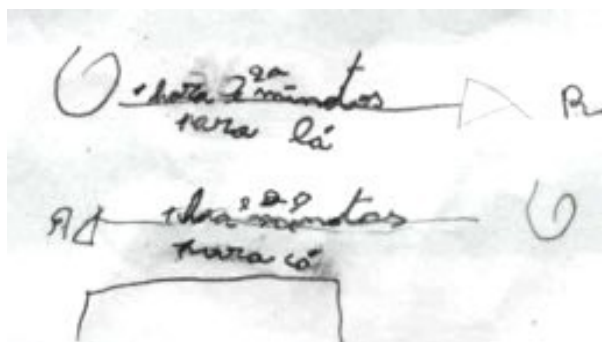



Figura 15. Croquis simplificado

Depois, Ruben, Marlene, Leila e também Tatiana começam a visualizar um vai-e-vem de autocarros.

Primeiro sai um autocarro, depois de 20 minutos outro, depois de

20 minutos outro, depois de 20 minutos outro.

Entretanto, o primeiro autocarro já chegou, pode voltar para trás. As crianças ficam na dúvida se são três ou quatro.

Gisela: Três ou quatro? Não chega!

Ruben: Três ou quatro de cada lado.

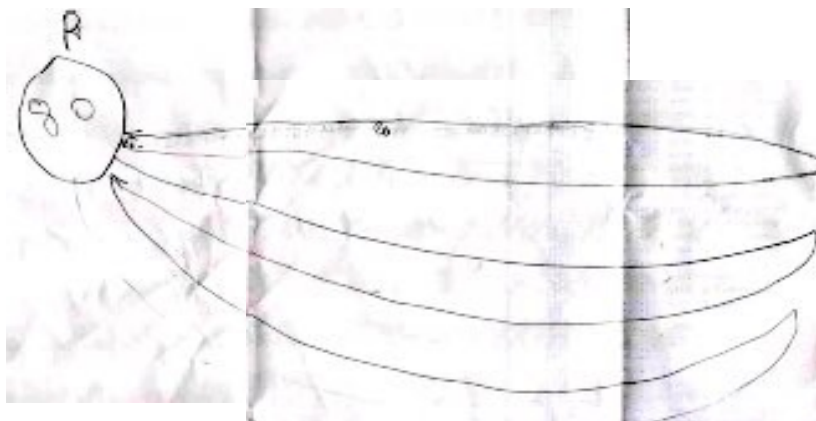



Figura 16. As idas e voltas dos autocarros visualizados por Margarida e Gisela

Os desenhos tornam se novamente mais confusos, mas há uma proposta de Margarida e Gisela, que nos servirá para elaborar coletivamente uma tabela de correspondências (*ver página seguinte*).

Com a leitura coletiva da tabela, conclui-se que se o 4º autocarro arranca no minuto 60, o 5º já pode ser o primeiro que vem do outro lado.

Assim, se não houver atrasos e engarrafamentos, 8 autocarros chegam para fazer o serviço da carreira 14.

O grupo fica satisfeito por ter descoberto a lógica.

Outurela		Rossio	
minuto 0	→	minuto 80	
	minuto 80	←	minuto 0
minuto 20	→	minuto 100	
	minuto 100	←	minuto 20
minuto 40	→	minuto 120	
	minuto 120	←	minuto 40
minuto 60	→	minuto 140	
	minuto 140	←	minuto 60

Figura 17. Tabela de correspondências

Viva a bola

(2º ano)

1ª parte.

Escrevo no quadro:

Portugal	Bélgica	França	Espanha
Inglaterra	Suécia	Dinamarca	Noruega
Roménia	Itália	Holanda	Eslovénia
Alemanha	Turquia	República Checa	Jugoslávia

Ivan: São equipas.
Gisela: São nomes.
Paula: São nomes de equipas.
Núria: São nomes de países.

Eu: Porque pensam que escrevi estes nomes?

Mário: Por causa do projeto da bola.

Eu: Não é bem isso, mas o que estes países estão a fazer neste momento?

Ivan: A jogar bola.

Eu: Aonde?

Bruno: No campo!

Eu: Está bem, mas em que campeonato?

Margarida: O Europeu.

Eu: E isto quer dizer o quê? Europeu?

Ninguém responde.

Eu: Vem de outra palavra: Europa.

Gisela: Isto é uma cidade.

Marlene: Um país.

Leila: Um continente.

Eu: Muito bem: é um continente, e todos estes países fazem parte deste continente.

Marlene: Cabo Verde também?

Eu: Não, é outro continente. Talvez conhecem outros nomes de países deste outro continente.

Tiago: Angola.

Adramane: Moçambique.

Marlene: Guiné.

Eu: Sim, são países de?

Marlene: De Cabo Verde.

Eu: Não, são da África.

Hugo: África do Sul.

Eu: Também é país de África. Mas agora vamos voltar ao campeonato Europeu de futebol. Sabem quantos jogos é que são ao todo, durante este campeonato?

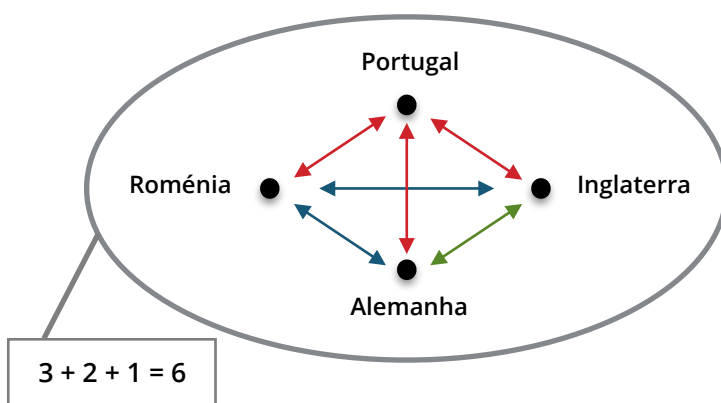
Ninguém sabe.

Eu: Então, quantos países são?
Ivan: 4 em cada grupo.
Eu: E quantos são ao todo. Não, não, contam e não adivinham!
Gisela: 16
Eu: Porquê?
Marlene: Porque é 4 x 4
Eu: Que número é?
Núria: É da tabuada.
Margarida: É um número quadrado.
Eu: E quantos jogos é que cada país joga neste momento?
Ivan: Três.
Eu: Então, cada um joga três jogos, quantos jogos são dentro de um grupo?

As respostas apontam 3, 9, 12 e dois ou três tem 6, mas quando peço para explicar, ficam atrapalhados e dizem que deve ser 12.

Ivan: É. 3 jogos x 4 países dá 12.
Eu: Tens a certeza disso?

Alguns voltam para 6, mas não sabem porquê.

Proponho o seguinte diagrama:

Depois, pergunto como fazer para calcular quantos jogos são ao todo nesta fase. Margarida sabe que são 4 grupos cada um com seis jogos, portanto, podemos escrever:

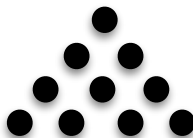
$$6 \frac{\text{jogos}}{\text{grupo}} \text{ x } 4 \text{ grupos} = 24 \text{ jogos}$$

2ª parte

O problema acerca do campeonato de futebol continua a entusiasmar parte do "auditório".

Quando começamos por nos lembrar o que fizemos na segunda-feira, ainda conto que estas contas como 3 + 2 + 1 eram contas de que Pitágoras gostava muito. E conto que ele gostava muitíssimo desta: 4 + 3 + 2 + 1 porque dava 10 como resultado (*algumas crianças fazem a conta para verificar*).

Núria conta que viu um livro sobre Pitágoras no ATL, e que tinha muitas coisas, e também tinha a tabuada.

Ainda mostro como o Pitágoras fazia as contas:

Parece um triângulo feito de bolinhas!

Elaboramos o esquema que incluímos na página seguinte e quando peço para fazer a conta do número total de jogos, há várias crianças que contam um a um.

Interrompo, dizendo que têm que tentar de montar uma expressão numérica primeiro.

Lá aparece:

$$6 + 6 + 6 + 6 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

e com alguma dificuldade

$$24 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

A partir desta proposta entendemos que podemos também escrever

$$24 + 6 + 2.$$

No fim, raciocinamos da seguinte forma:

6 x 4	=	24
2 x 3	=	6
1 x 2	=	2
total		32

Isto faz concluir Ana Paula que há muitas maneiras para resolver o problema. Confirmo, e digo que isto é o caso na maioria dos problemas, mas que há formas mais rápidas do que outras.

As crianças concordam que fazer as multiplicações é mais rápido do que fazer somas.

O top das prendas no 3º ano

(3º ano)

Quantas prendas tivemos?

No dia 3 de Janeiro, ao combinar o trabalho, falando também das prendas que cada um recebeu do suposto Pai Natal, combinámos elaborar um gráfico conjunto, em cada uma da crianças num bocado de papel e eu no quadro, iam registando todas as prendas que recebemos.

Juntamos cada nova prenda a lista vertical, enquanto que no horizontal fomos escrevendo números (*ver figura 17, página seguinte*).

Neste primeiro momento não ficamos com os nomes associados. À medida que a lista se ia complicando, fizemos alguns acordos: *cuecas* contava como 1 peça de roupa, mesmo se eram várias, *meias* também. *Ténis* transformou-se em *ténis e sapatos*, *pulseira* em *anel e pulseira*, e depois de aparecer um *fio* e um *relógio*, os quatro objetos ficaram em *jóias*. Os carros era, muito variados, os CD's podiam ser

de música ou de jogo de computador. Os *adereços* eram pequenos objetos de *maquilhagem* ou *perfumes*, o *comboio* também podia ser uma *pista de comboio*.

No fim de discutir e apontar uma hora, tínhamos o levantamento completo:.

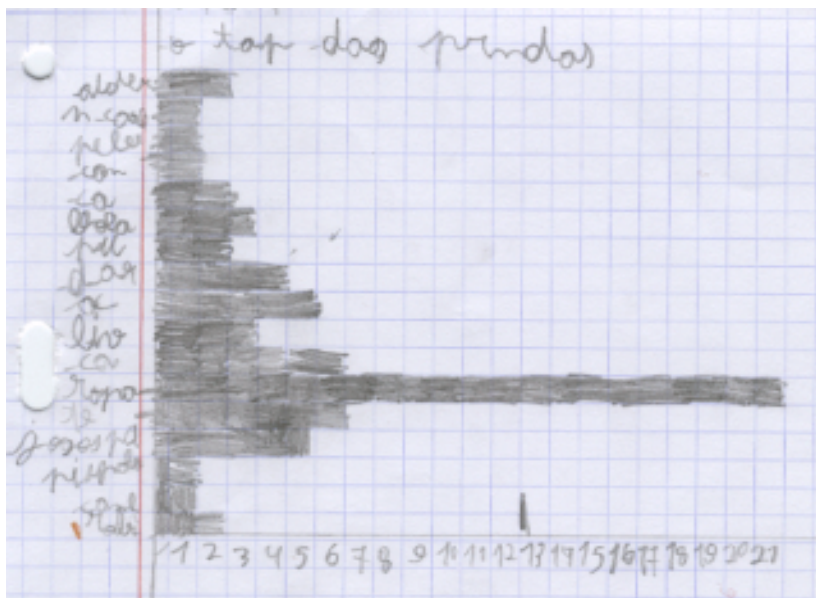



Figura 17. O top das prendas.

Gráfico e levantamento por pessoa.

Na sexta-feira, dia 5, apresento uma primeira versão do gráfico "top-10 das prendas", que preparei em casa[35].

Ponho em discussão: o que é diferente em comparação com o gráfico que fizemos juntos:

---

[35] Perdi esta versão intermédio do gráfico. Para perceber a discussão que segue, o gráfico já corrigido (figura 19, página 82 pode servir de apoio).

prendas	adramane	a isabel	a paula	a margarida	bruno	gisela	hugo	ivan	leila	marlene	m. sérgio	pedro	ruben	rui	tatiana f	tatiana h	tiago	pascal
jogo																		
pista																		
avião																		
actionman																		
conjunto pentes																		
barbie																		
game-boy																		
cadela																		
robô																		
canetas e lapis																		
barco																		
peluche																		
boneca																		
guarda-chuva																		
pistola																		
play-station																		
ténis ou sapatos																		
jóias																		
maquina calcul.																		
comboio																		
skate																		
roupa																		
carro																		
livros																		
cd																		
adereços																		

Figura 18. Grelha de apoio para o levantamento pessoa a pessoa.

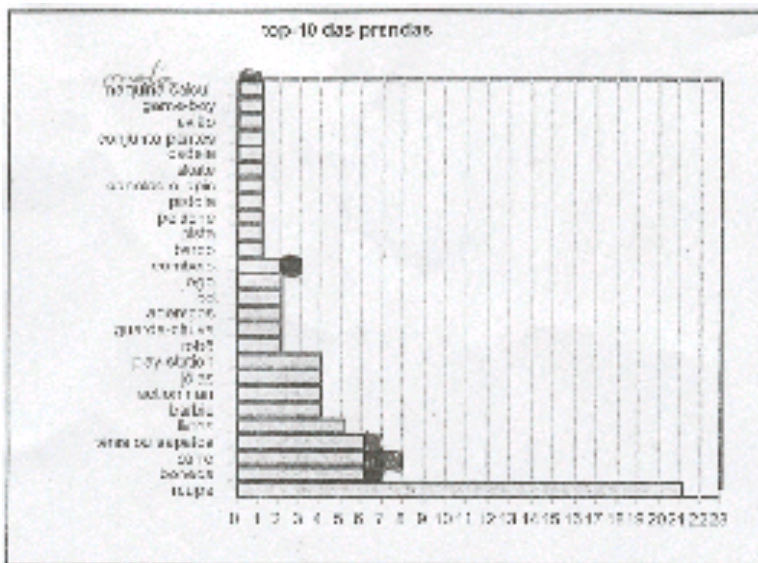



Figura 19. Gráfico preparatório para o top 10 das prendas com correções..

Gisela: A ordem das prendas.

Ivan: O maior está em baixo.

Margarida: É o que ia dizer!

Bruno: Em cima estão os que só saíram uma vez.

Eu: Então, podemos ler algumas coisas neste gráfico. Paula, quantas vezes saiu a play-station.

Paula: Não estou a perceber nada.

Gisela: É 4, Pascal.

Eu: Porquê?

Gisela: Porque aquele pintado vai até o nº 4.

Paula: Ah! Agora já estou a perceber.

Eu: E os ténis e sapatos?

Ivan: 6 vezes.

Eu: O que mais saiu 6 vezes?

Hugo: O carro e as bonecas.

Eu: Quantas prendas é que saíram só uma vez?

Ruben: 11!

Eu: Está certo? Tiago?

Tiago: Eh?

Marlene: Vê se está certo, estúpido. Conta! (*ela própria disse*:) Está, Pascal.

Ivan: Isto assim, é mais fácil de ver, porque está de pouco para muito.

Margarida: É como os gráficos do projecto da natureza.

Levantamento pessoa a pessoa.

Entrego uma nova tabela (*figura 18*) para fazermos o levantamento pessoa a pessoa.

Como entretanto também estão de regresso Adramane e Tatiana

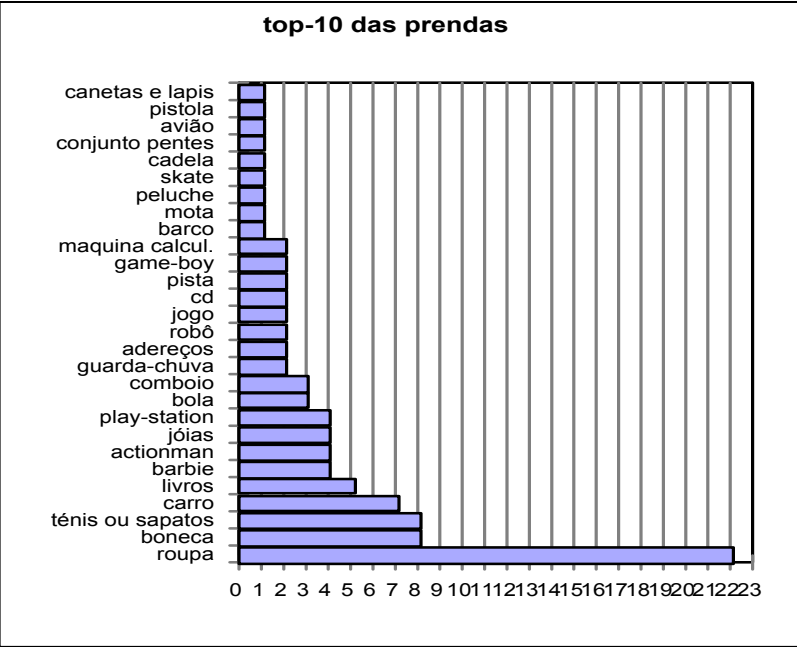



Figura 20. Gráfico final top 10 das prendas

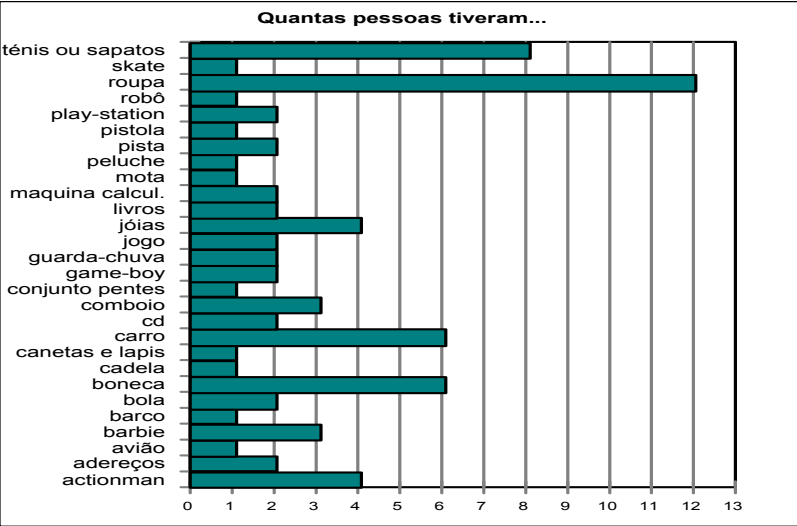



Figura 21. Frequência das prendas. 13 pessoas receberam roupa.

Filipa, acrescentamos prendas. Logo com Adramane, temos mais uma mota, e uma pista. Há outros pequenos ajustes e descobrimos que me esqueci de incluir as bolas no gráfico inicial. Assim, à medida que vamos preenchendo a tabela (*figura 18*), ajustamos também este gráfico (*figura 19*).

Algumas crianças lembram-se de ainda mais prendas, quando se ouvem umas às outras. Temos que as juntar.

Bruno: A mota, podemos pô-la mesmo por baixo de prendas.
Ivan: Boneca, já são 8, mas fica na mesma na segunda posição.
Hugo: O comboio já não está no sítio certo.

Quando nos vêm oferecer o bolo-rei, falta-nos fazer o levantamento de quatro pessoas. Combinamos continuar na próxima segunda-feira.

Levo os gráficos para casa para os adaptar. Na segunda-feira, completamos os dados e cruzamos a informação para controlar se tudo "bate certo" (*figura 20, página seguinte*).

A partir do levantamento completo das prendas que fiz enquanto as crianças faziam as associações, é agora possível apresentar a distribuição de prendas por quem as recebeu (*figura 21, página seguinte*).

Quando pergunto se pensam que houve mais prendas sob forma de roupa ou de brinquedos, a primeira resposta é:

Paula: Mais roupa.
Ivan: Se juntamos os ténis.
Margarida: Não, há muitos brinquedos, se juntamos tudo, da mais.

Decidimos dividir as prendas em grandes categorias o que não se revelou fácil de fazer.

Discutimos a diferença entre brinquedos e jogos. Surge com alguma dificuldade a palavra utensílios (coisas que utilizamos).

Desenhámos um diagrama em que fomos colocando os objetos, abrindo novas categorias, cada vez que achávamos necessário.

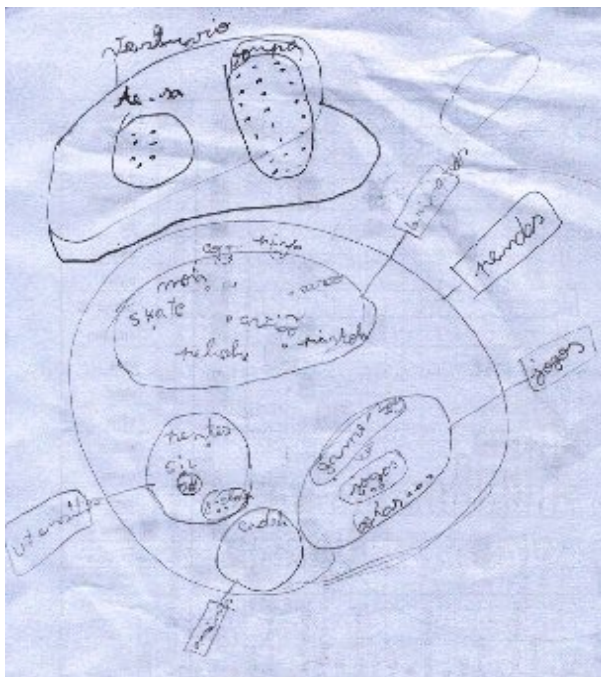



Figura 22. Tentativa de diagrama.

O resultado não é muito legível, porque são muitas etiquetas, são muitas roupas e muitos sapatos, e isto não facilita a contagem, nem a representação. Depois, parece que o vestuário não pertence às prendas.

Temos categorias, sim, mas onde é que ficamos? Mais vestuário ou mais outras coisas?

Pergunto como é que podemos ver melhor.

Tiago: Contando.

Ivan: Mas isto já fizemos, e é difícil.
Gisela: Ó Pascal, não dava para fazer outro gráfico?
Eu: Como?
Ana Paula: Pomos só os grandes grupos.
Bruno: Podes fazer um destes gráficos redondos como já fizemos para a água da terra.
Ivan: Já!

Prometo trazer o gráfico para o próximo momento de problemas, na quarta-feira, ainda que já tínhamos decidido que íamos começar a análise das previsões para as eleições do Presidente da República.

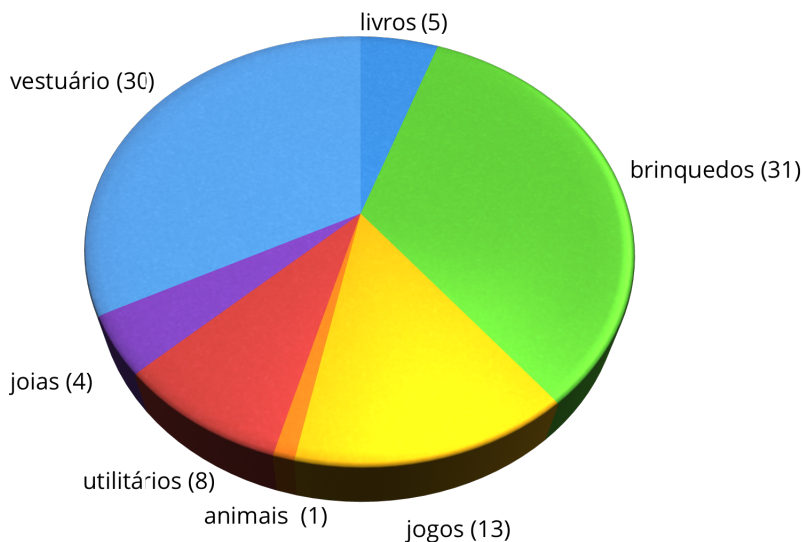



Figura 23. Reedição do gráfico 2D produzido para a turma

A gestão financeira do jornal da turma

(2º ano)

1º momento: Quinta-feira 14 de Outubro

Saiu o nosso primeiro jornal!

Expliquei ao grupo que, antes de vender o jornal, era necessário saber um pouco mais sobre seu custo. Trouxe, junto com o jornal, a factura da loja de fotocópias: 1950 escudos para 50 exemplares de três folhas, frente e verso. A primeira questão tem a ver com o número de jornais que há para vender:

Se as 21 crianças da sala recebem um jornal de graça, então quantos jornais é que temos para vender?

Parecem não entender, e reformulo a questão:

Quantos jornais temos para vender, depois de tirar os 21 dos 50 que fizemos?

Mas tenho mesmo que apresentar um esquema para podermos avançar. Proponho:.

50 - 21 = ?

e convido a pensar no problema.

Núria: São 45.

Eu: Como é que posso saber se isto está certo?

Margarida: Podemos contar os jornais.

Eu: Claro. Mas não tenho aqui os jornais. Estão na minha casa, porque não acabei de os agrafar.

Marlene: Não são 45 mas 32.

Eu: Porque?

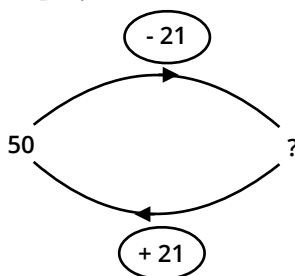
Marlene: Porque temos 50.

Ivan: Oh! Estúpida! Não são 32 não. São 41.
Eu: Então afinal, são quantos?

As opiniões dividam-se. Perante a dúvida, pergunto:
— Então, o que estamos a procurar?

Depois de alguma hesitação, Ana Paula avança:
— Quantos sobram depois de tirar os jornais para nós.
Eu: Juntos, quantos são?
Pedro: Juntos são 50.
Eu: Para vocês, são 21.

Núria insiste que são 45 jornais para vender. Faço as contas: 45 + 21, 66; Com a proposta de Marlene são 32 + 21, 53; Com a proposta do Ivan são 41 + 21, 62.

Mostro um esquema que já utilizamos em outras ocasiões:

Marlene: Então temos menos para vender.
Margarida: Tem que ser com 20.
Tatiana: São 25 (Controlamos: não dá 50)
Ana Paula: São 27 (controlamos: também não dá)
Núria: 49 + 1 dá 50
Gritos: Então é 29, é 29 é!

A dificuldade que as crianças tinham no início do ano para transformar uma questão em expressão numérica, fez com que investi ao

longo do ano na análise de questões simples ou mais complexas do dia a dia através das nossas intervenções no meio envolvente.

Já mais para o fim do ano lectivo invertemos a situação e começamos a criar enunciados matemáticos a partir de expressões numéricas. Revelou-se muito difícil e por isso, uma boa base de trabalho para o próximo ano[36].

Voltando agora para as notas do meu diário:

Eu: Agora vamos para a outra parte. Quanto é que vamos pedir por jornal?

São várias as crianças que propõem uma moeda de 100 escudos.

Marlene: 100 é muito.

Eu: É verdade que um jornal grande para adultos tem muito mais folhas e custa 140 escudos. Talvez 100 é muito.

Nelson: Fica uma moeda de 50!

Concordam com a moeda de 50 escudos. Não é a altura de perguntar se assim "*ganhamos*" ou "*perdemos*" dinheiro. Contudo sugiro descobrirem quanto dinheiro vamos receber. Raciocinamos juntos: é simples e rápido. Se um jornal custa 50 escudos, então dois jornais são 100 escudos. Contar de cem em cem tem esta vantagem que é quase como contar de 1 em 1. Assim, cada grupo faz um registo a partir de:

2 jornais são 100 escudos
4 jornais são 200 escudos
etc.

Quando os grupos chegam aos 20 jornais, ninguém têm grandes dúvidas que isto significa 1000 escudos.

---

36 Ver *Construir Enunciados*, página 164.

Quando as crianças chegam ao 29º jornal, apercebem-se que não serão 1500 escudos mas menos. Fica em 1400 escudos mais 50 escudos, são 1450.

Ninguém se lembra de que as fotocópias custaram 1950$00.

2º momento. Reler o nosso jornal

Grande alegria na sexta-feira. A releitura do jornal foi bem sucedida, a seguir mais nada se fez de coletivo, a não ser a reunião de Conselho.

A venda do jornal criou forças para trabalhar para o próximo, mesmo com algumas confusões no meio. Nelson pensou que o dinheiro da venda era para ele e Paula ficou mesmo convencida de que Nelson ficou com o dinheiro. Isto deu origem a uma disputa só ultrapassada quando, na semana a seguir apresentei as contas dos jornais levados para vender e o dinheiro entregue. Eu fiz a contabilidade, e a minha palavra de que o dinheiro foi entregue foi aceite.

O problema é que as vendas do jornal renderam ligeiramente mais de 2000 escudos ainda com 5 por vender. Se por um lado isto significa que o próximo – para o qual já temos 6 textos – está pago, por outro lado, insinua que as nossas contas de quinta-feira estavam erradas. Mas com alguns esclarecimentos, o problema foi ultrapassado: houve vários professores da escola que deram uma moeda de 100 escudos e não pediram o troco. Uma pessoa até deu 500 escudos (!), dizendo que o resto era para a turma.

3º Momento: Terça-feira 16 de Novembro.

O 2º jornal está a venda; há menos vendedoras do que no primeiro número. Mas há muito mais coisas para fazer, e temos que nos

dividir par dar resposta a tudo:

- temos uma estagiaria de primeiro ano da ESE na turma, que precisa de ser esclarecida sobre a forma como trabalhamos;
- recebemos uma segunda carta dos políticos: o Bloco de Esquerda mandou-nos uma carta interessante, no qual está escrito que todas as pessoas são políticos. Bruno fica encantado com a ideia que as crianças também são políticos e tenta interpretar a carta junto com dois colegas[37];
- à tarde, um grupo de meninas vai à biblioteca da escola, o projeto acerca das Barbies está a andar;
- estamos a preparar uma ida ao teatro e prevemos um trabalho sobre esta saída. Ivan, Nelson e Rui estão a organizar as informações que temos acerca da peça *Os três mosqueteiros*, que iremos ver;
- a chegada, há pouco tempo, do novo material Cuisenaire renovou o entusiasmo para o material e para explorações de somas contínuas e a "escrita" de equações.

Além disso, passamos uma fase difícil na organização da sala e da turma.

Há alguma oposição dos líderes da sala que acham que têm trabalhado demasiado em comparação com colegas de outras turmas e de outras escolas ("*Eles só têm que preencher fotocopias. O Pascal não dá fotocopias*" foi um dos ataques que registei.)

Por tudo isto, não deu para discutir com o grupo o engano da loja (que só descobri tardiamente) o que fez disparar o preço das fotocópias.

---

37 Ver Paulus, Pascal (2002). 'Os políticos: como contam e o que nos contam' *in Escola Moderna nº 16 5º Serie, pp 24-43.* Lisboa: Movimento da Escola Moderna.

4º momento: Segunda-feira, 13 de dezembro de 1999.

Houve um trabalho notável sobre as contas do jornal antes de organizarmos a venda.. Estas contas ensinam-nos que "perdemos" 610 escudos desde o início do ano escolar, o que é muito porque houve novo engano, ainda maior, por parte da loja das fotocópias.

Em conjunto elaboramos o quadro seguinte:

jornal	custo de fotocopia	n.º jornais	custo por jornal (contas com a máquina de calcular)	diferença com preço de venda
n.º 1	1950	50	950 : 50 = 39	11
n.º 2	3240	60	3240 : 60 = 54	- 4
n.º 3	720	60	720 : 60 = 12	38

Surgem os seguintes comentários:

Silvana: Ganhamos muito dinheiro com o terceiro jornal.

Gisela: Oh Pascal. Não pode ser: os jornais 2 e 3 não custaram a mesma coisa!

Ivan: O 1 também não.

Pascal: Mas a Gisela estava a ver outra coisa.

Gisela: São 60 cada um, e o 2 custou muito mais.

Margarida: É esquisito, o terceiro jornal são mais e custou menos do que o primeiro.

Ana Paula: Eles enganaram-se.

De seguida, acertamos as contas em termos de venda:

jornal	custo (fotocopias)	jornais vendidos	receita
n.º 1	1950	29	1450
n.º 2	3240	38	1900
n.º 3	720	39 (previsão)	1950
Total	5910	106	5300

Já no fim da nossa conversa, Ana Paula lembrou-se que o primeiro jornal rendeu mais, porque houve professores que deram mais dinheiro e não pediram troco. Lembro-lhes que registámos uma venda de 2100 escudos. Ivan observa que ainda não vendemos os jornais número 3, e que não sabemos se os vamos vender todos.

Esperámos até o dia 4 de Janeiro de 2000, para perceber que a situação era a seguinte:

jornal	custo (fotocopias)	receita previsível	receita efectiva
n.º 1	1950	1450	2100
n.º 2	3240	1900	2000
n.º 3	720	1950	1700
Total	5910	5300	5800

Afinal, tínhamos menos 110 escudos do que o custo das fotocópias.

Fiz observar que isto se devia principalmente aos enganos da loja de fotocopias e expliquei que também não contámos o preço das folhas que imprimimos e da tinta da impressora.

Como no último jornal houve também um pequeno problema com as cópias recto-verso, combinámos escrever uma cartinha à loja, para avisar dos erros que houve...

Cuisenaire e Pitágoras, uma dupla vencedora.

(2º ano)

Estamos novamente a trabalhar a multiplicação com o material Cuisenaire. O número 16 é especial. Há três tapetes, 8, 2, 4. Na turma, conseguiu-se colocar o tapete 8 por cima do 2, o 4 fica só. Pergunto:

— Qual é a figura?

Núria: 4 réguas.

Ivan: 4 réguas de 4.

Margarida: Um tapete de 4 réguas de 4.

Eu: Mas qual é a forma do tapete?

Paula: Um quadrado.

Eu: Ok. Vamos pôr o quadrado no sítio[38]: 4 réguas de 4, portanto na casa onde fica casa ponho o número?

Vários: o 16.

Eu: Agora, fazem o quadrado mais pequeno que conseguem fazer com réguas dois.

Ivan mostra logo o quadrado que fez.

Algumas crianças mostram rectângulos com 4 réguas de dois. Ivan rectifica.

Pomos novamente o número na sua casa. Ninguém tem dúvidas que 2 vez 2 são 4.

Continuamos o trabalho com 3 vez 3. Todos já sabem que é 9. É um quadrado ou um rectângulo? A Paula e a Gisela só se convencem quando cruzamos dois quadrados. Colocamo-lo também no sítio na grelha. Descobrimos o quadrado mais pequenino (1) e ainda o quadrado 25.

Faço observar a tabela:

— Onde estão os números dos quadrados?

Margarida: Nesta linha de cima para baixo.

Eu: Sim. Como vamos chamar esta linha?

Núria: A linha dos quadrados.

Eu: Boa. E esta linha tem outro nome em matemática: chama-se a (*escrevo*) diagonal.

Ivan e Paula lêem: dia go, diagonão.

Corrijo: diagonal.

---

[38] Na tabela de Pitágoras.

Pitágoras ... outra vez

(3º ano)

Depois de termos descoberto a linha dos quadrados, os números repetidos, os números que aparecem só uma vez, os números retangulares "deitados" e os retangulares "em pé" começamos a utilizar a tabuada intensivamente, para os "concursos" internos, para treinar o cálculo mental.

Pouco a pouco, deixamos de consultar a tabuada para responder às perguntas do concurso, o que não quer dizer que continuamos a treinar regularmente.

Entretanto, pouco antes das férias do Natal, proponho descobrir quantos números diferentes existem na tabuada.

Figura 24. As contagens de Ruben

O primeiro momento, todo o grupo vai memorizando repetições, mas perante a dificuldade de ver tantos números, aparentemente sem ordem lógica, muitos participantes vão desistindo.

Só o par Gisela — Ana Paula e outro par Ruben — Ana Margarida apresentam alguns palpites com tentativas de esquemas organizados.

Figura 25. O trabalho da Gisela

Já mesmo na última semana antes do Natal, Ruben e Ana Margarida estão convencidos que há 42 números diferentes na tabuada.

Ruben passa inclusivamente vários dias a me perguntar sempre de novo se o resultado que me mostra é correto… dá a ideia que pas-

sou algumas noites em branco devido ao Pitágoras.

Contudo, mesmo tendo a convicção que são 42, nenhum dos dois conseguem demonstrá-lo.

Uma primeira tentativa para vermos em conjunto se têm razão ou não, não resulta muito bem: conforme as contagens, temos entre 40 e 56 números diferentes, e neste dia o clima da sala não permite grandes trabalhos.

Depois das férias, são os problemas das prendas, as presidenciais, o autocarro 14, os gráficos das nossas presenças e os números do Flint que retêm a nossa atenção, além de alguns problemas relacionados ao estudo que estamos a fazer em relação à natureza.

O concurso mantém-se, embora torna-se menos frequente.
Só depois das férias do Carnaval é que Ana Margarida insiste em voltar a olhar para a tabuada.

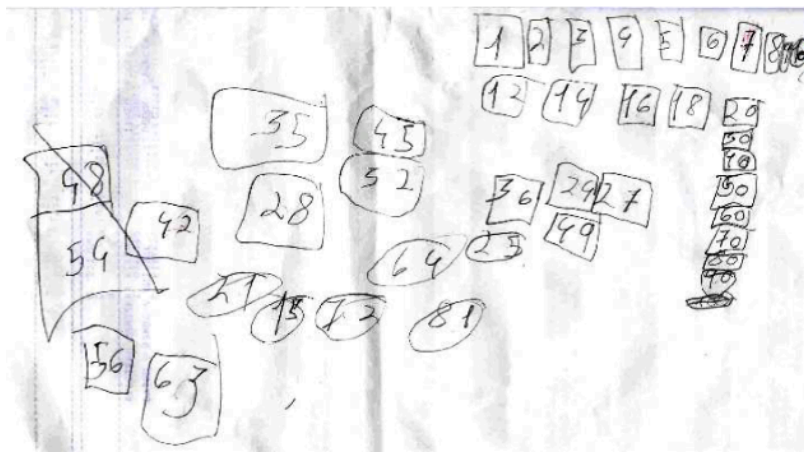



Figura 26. O esquema de Ana Margarida

Ela começou também um pequeno trabalho sobre Pitágoras...
Proponho que deste vez procuramos mais sistematicamente.

Afixo no quadro a tabuada — que normalmente se encontra na "*parede de matemática*" — e devolvo as grelhas que já tinham feito.

Ruben e Ana Margarida lembram que pensam que são 42.

Pergunto quantos números diferentes é que há na primeira linha.

Hugo: São 10.

Eu: Agora procuram quantos números, diferentes de os da primeira linha, há, na segunda linha.

Bruno: São 5.

Ana Paula: São 4.

Ivan: Não, são mais.

Pedro: Não estou a perceber, Pascal.

Eu: Procura os números na 2ª linha que não estão na primeira linha, e vê quantos são.

Escrevemos:

1ª linha: 10 números diferentes

2ª linha: 5 números diferentes

(estamos de acordo que são os números a partir do 10, os outros já contámos).

O grupo leva uma eternidade a procurar quantos números diferentes há na 3ª linha — também são 5 números —, pelo que proponho:

- Hugo, Pedro e Adramane, procuram quantos novos números há na linha 4.
- Ivan, Rui e Tiago, procuram quantos números novos há na linha 5.
- Ana Isabel, Ana Margarida e Leila pesquisam a linha 6.
- Ruben e Mário Sérgio a linha 7.
- Gisela, Ana Paula e Marlene, a linha 8.
- As duas Tatianas a linha 9.

- O grupo de Ivan ainda vê a linha 10, porque se despachou mais depressa.

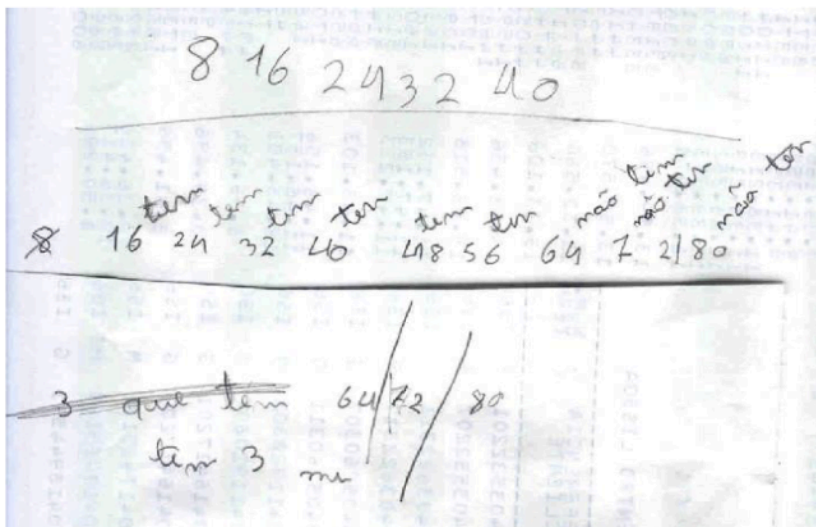



Figura 27. Quantos novos números aparecem na linha 8?

5 minutos depois, pergunto pelos resultados.

Pedro: Na linha 4 são 4!

Ivan: Na linha 5 também: 25, 35, 45 e 50.

Eu: Então, na primeira eram 10. Na segunda e na terceira eram 5. Na quarta e na quinta são 4. O que pensam para a 6ª linha? Palpites.

A maioria pensa que vai ser menos, alguns pensam que vai ser mais, três dizem que vai ser o mesmo número.

Eu: Então Ana Margarida?

Ana Margarida: São 36, 42, 48, 54 e 60. São 5.

Gisela: Não, o 36 já está na linha do 4.

Eu: Então?

Ana Margarida: Então são 4.

Eu: Portanto, o mesmo número de números novos como na linha anterior.

Gisela: É fácil. Até aqui (ela aponta a intersecção dos números quadrados) estão sempre repetidos por cima.

Eu: Mas depois ainda há alguns repetidos. Foi com 30, também com o 36.

Ivan: Ah!, isto já vi há muito tempo...

Eu: E para a sétima linha, Ruben?

Ruben: 49, 56, 63, 70. Também são 4

Eu: Gisela, para a oitava linha, também são 4?

Gisela: São 3: 64, 72 e 80

Eu: E depois Tatiana Helena?

Tatiana: É o 81.... é 1.... não, não, é o 90 também... é 2.

Ivan: Na última linha é só um, o 100. Primeiro Rui disse que eram todos, mas depois disse que não era nenhum. Mas é 1, o 100.

Por baixo do enunciado "Quantos números diferentes é que há na tabuada até 10 x 10?", podemos agora escrever a lista completa:

1º linha: 10 números diferentes
2º linha: 5 números diferentes
3º linha: 5 números diferentes
4º linha: 4 números diferentes
5º linha: 4 números diferentes
6º linha: 4 números diferentes
7º linha: 4 números diferentes
8º linha: 3 números diferentes
9º linha: 2 números diferentes
10º linha: 1 número diferente.

Agora podemos calcular o total:

(10 + (5 x 2)) + (4 x 4 + (3 + 1)) + 2 = (10 + 10) + (16 + 4) + 2 = 20 + 20 + 2 = 42!

Ruben e Ana Margarida tinha a solução correcta!

O tesouro do Pirata Flint

(3º ano)

Início de Fevereiro.

Hoje propus o seguinte problema:

O Malvado Pirata Flint escondeu 30 tesouros na ilha. Avisou os piratas que podiam levar os tesouros a bordo do seu barco, em 5 dias, levando cada dia um número ímpar de tesouros. Se não respeitarem esta regra, mandava os espíritos maus destruir o barco. Depois desapareceu a rir. Conseguem ajudar os piratas?

As crianças estão organizados em pequenos grupos, como sempre nestas atividades. Os grupos são:

- Ruben, Margarida, Sérgio e Leila;
- Marlene, Gisela e Tatiana Helena;
- Pedro, Ivan e Ana Paula;
- Bruno, Hugo e Rui;

Hoje faltam 4 pessoas: Adramane, Tatiana Filipa, Ana Isabel e Tiago[39].

Circulo entre os grupos, ouvindo e registando algumas das observações.

Ruben: Quantos piratas são?

[39] O realojamento para fora da zona da escola fez com que 4 crianças foram forçadas a nos abandonar no fim do ano.

Sérgio: Isto não interessa.
Margarida: Já sei, são 16.
Eu: 16 que?
Margarida: Não sei.

Bruno, Hugo e Rui estão a fazer tentativas:
— 5 + 5 +5 +5 +5, quanto dá?

Figura 28. As folhas de rascunho de Bruno e de Gisela

Gisela está a escrever todos os números ímpares de 1 até 29. De seguida, vai experimentando várias possibilidades, com Marlene e Tatiana.

Tatiana H: Com 5 não dá. Só se podem tirar de noite.
Marlene: Com 9 não dá, é 45. Deve ser mais menos.

Margarida: Suponho que são 3 piratas.
Sérgio: Isto não interessa.
Margarida: Interessa sim, porque são os que levam os tesouros.
Leila: Vamos tentar com 3 tesouros por dia.

Ana Paula: Com 7 não dá, é 35. Espera, com quatro dias de 5 e um de 10.
Pedro: Isto é par!

Ivan: Então e se fazemos 30 a dividir por 5.

Ana Paula: 30 : 5 é 6, não dá é par.

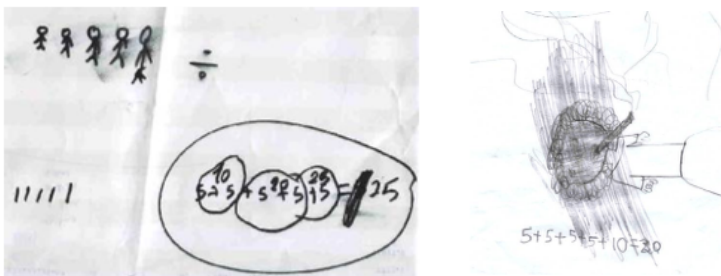



Figura 29. Leila: Vamos tentar com 3 tesouros por dia   Primeira folha do grupo de Ivan

Ruben: (falando alto, todos ouvem) Podemos repetir números?

Eu: Penso que sim, aliás ainda não fizeram outra coisa.

Ruben: Mas quero dizer, juntar diferentes mas também repetidos.

Eu: Como assim?

Ruben: Bem, 1 + 3 + 3 +9 + 15, uma coisa assim.

Entretanto Ana Paula começa a desenhar conjuntos de tesouros.

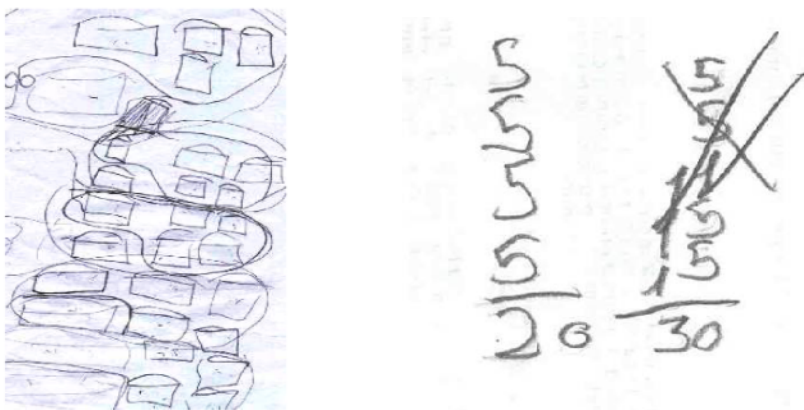



Figura 30. Os tesouros de Ana Paula e pormenor das tentativas de Ivan.

Bruno, Hugo e Rui pegam na ideia de Ruben: 1 + 3 + 5 + 7 + 9, só

é 25. Fazem 1 + 5 + 7 + 7 + 9 e obtêm 29. Gisela descobre que a proposta de Ruben dá 31.

Ivan: Parece que não dá mesmo. Dá 29 ou 31.
Eu: Parem um momento, tenho uma proposta.
E se começássemos de outra forma? Vamos ver se conseguimos em dois dias, em três dias, etc.

Discutimos em conjunto.

Ivan: Ah, em dois dias é fácil: são 15 + 15.
Bruno: Ou 1 + 29

Silêncio...

Gisela: Em dois dias há muitos, Pascal.
Sérgio: Com 3 dias não consigo.
Marlene: Em quatro dias dá: 3 + 3 + 3 + ... 21
Gisela: Só dá quando o número de dias é par.
Ivan: Talvez dá porque 30 é par.

Concluímos:

O pirata Flint pregou uma partida aos outros piratas. Não dá para levar os 30 tesouros em 5 dias, utilizando números ímpares.
Descobrimos que só um número par de dias dá para fazer 30 com números ímpares, talvez porque 30 é par.

Quinta-feira, 22 de Fevereiro.

Continuámos a nossa investigação dos números do Capitão Flint. Desta vez, trabalhamos em grande grupo (estão 16 crianças presentes) e depois de nos lembrar o que o Flint tinha dito aos piratas, fomos a procura dos pares e dos ímpares.

Eu: Digam números ímpares. (*Vou escrevendo as propostas deles no quadro, em coluna*).

Gisela: 1
Ana Paula: 9
Ivan: 5
Marlene: 21

Escrevo o 21 juntando um 2 em frente ao 1 da Gisela.

Tiago: 10
Ruben: 10???
Gisela: 10 é par.
Ivan: 17
Bruno: 27 (*mudo o 1 do 17 em 2*)
Tatiana H.:3
Hugo: 15 (*escrevo um 1 frente ao o 5*)
Gisela: Pascal, porque não escreves os outros.
Eu: O que pensas?
Gisela: Porque é sempre assim?
Vários: Ein?
Gisela: Sim, é sempre com 1, 3, 5, 7 e 9.
Eu: Perceberam o que a Gisela quis dizer?
Ana Paula:Como assim, Pascal?
Eu: Então, os números ímpares acabam em que algarismos?
Bruno: Ah! É como no prédio dos números.
Eu: É isso mesmo.
Ivan: Então é sempre com 1, 3, 5, 7 e 9?
Gisela: É! É!
Eu: E agora, os pares.

Rapidamente desenvolvemos o mesmo raciocínio para os números pares. O último algarismo define o número, como nos ímpares.

Eu: Agora já podemos descobrir mais umas coisas que o Flint descobriu. Façam lá estas contas.

Escrevo no quadro:

1+3 3+5 5+7 7+9

1+5 3+7 5+9

1+7 3+9

1+9

Gisela: Faltam os gémeos.
Eu: Então, fazem mais estas:

E escrevo:

1+1, 3+3, 5+5, 7+7, 9+9.

Rapidamente, o grupo chega a conclusão que estes resultados são sempre números pares. Somamos as combinações pares.

Ana Paula: Estes, nem é preciso. É sempre par!
Eu: Então podemos fazer uma pequena grelha, como o Flint fez.

Apresento:

p = par; i = ímpar

(+)	i	p
i	p	
p		p

Bruno: Ímpar tem par!
Eu: Pois, a palavra "par2 está escondida dentro da palavra ímpar.
Ora bem. Dizer "par + ímpar" é a mesma coisa como dizer "ímpar + par".

Margarida: Podemos escrever com =?
Eu: Podem. É mais curto.

E escrevemos: **par + ímpar = ímpar + par**.

Ivan: Ah! Agora percebo. É por isso que o Pascal pôs aquele quadro escuro.

Eu: É sim. E já agora. O que será o resultado de par + ímpar?

Há muitas dúvidas. Escrevemos os palpitos:

Quem diz...	
Dá sempre par	Tatiana Filipa
Dá sempre impar	Gisela, Tiago, Rui
Às vezes dá par, às vezes ímpar	Todos os outros

Ivan muda de ideia e inclui-se neste último grupo, depois de ter dito que "*dá sempre ímpar*".

Proponho fazer como fizemos há pouco: vamos procurar todas as combinações possíveis entre os números pares e ímpares.

Desenho a tabela seguinte:

(+)	1	3	5	7	9
0					
2					
4					
6					
8					

Peço a todos de a preencher e de observar o que se passa.

Quando vê a tabela a ser preenchida, o Bruno diz logo:

– São sempre os mesmos números.

Gisela: Estão em fila.

Margarida: É como os números quadrados mas ao contrário.

Eu: Estão em diagonal, sim. Mas não estamos a fazer multiplicações, e não é exactamente como os números quadrados: Aqui são mesmo sempre os mesmos números.

Ana Paula: Porque é que não há pares?

Ivan: Espera. Talvez enganamo-nos.

Pouco depois, a tabela está no quadro:

(+)	1	3	5	7	9
0	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
2	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**
4	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**
6	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**
8	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**

Ivan: Eh! Primeiro tinha a ideia certa, depois fui mudar.

Eu: Pois. Às vezes os nossos palpites, de seguir a maioria, nos enganam...
Vamos acabar agora.

Vários: Oh!

Eu: Mas depois das férias, retomamos isso, porque quero vos mostrar mais algo que o capitão Flint descobriu.

Para já, podemos completar a nossa grelha:

(+)	i	p
i	p	i
p		p

6 de março de 2001

Continuamos. Escrevo no quadro:

"O Flint descobriu que ***p + p = p****,* ***i + i = p*** *e* ***i + p = i*** *e disse:*

Sem fazer contas, eu seu que

7 + 28 + 49 + 123 + 46

é ímpar.

Como sabia ele isso?"

Há, como sempre, respostas muito curiosas e descritivas.
Ana Paula escreve: "*Sabia porque fez as suas contas e o professor dele disse «batoteiro»*".

Outros, como Margarida, Gisela e Ruben, ficam muito aborrecidos, porque não conseguem logo "*fazer contas*".
Digo-lhes para observarem atentamente os números.

Ivan: Há mais números ímpares.

Gisela: Então deve ser por isso, porque há mais números ímpares.

Eu: Então, escrevo: 7 + 1 + 2 + 4 + 3 + 5.
Tem mais pares ou ímpares?

Ivan: Mais ímpares.

Eu: Isto tem resultado ímpar ou par? Façam as contas.

Ivan: 7 + 1 = 8

Eu escrevo em árvore por baixo.

Gisela: 3 + 5 = 8 também.

Eu escrevo outra vez por baixo.

Ivan e Tiago: 2 + 4 = 6, é par.

Eu: Então?

Gisela: É par.

Eu: Portanto, a ideia não funciona. Tem que procurar outra explicação.

(*Entretanto, passo a discussão para os outros grupos. Tenho que voltar a fixar os números pares e os números ímpares*).

Hugo: 7 é ímpar.

Eu: Porquê?

Ana Paula: Porque sim.

Eu: Está bem. Mas não têm uma resposta mais matemática?

Margarida: Porque é de dois em dois.

Ruben: Hein?

Eu: Outra pergunta: qual é o primeiro número ímpar?

Vários: 1

Tatiana Filipa: 0

Eu: Não, 0 não é ímpar. Agora, Margarida disse que é de dois em dois. 1 + 2?

Vários: 3!

Eu: 3 + 2?

Ruben: Ah! 5.

Eu: 5 + 2?

Gisela: 7

Eu: E a seguir?

Tatiana Helena: 9

Eu: Pronto, paramos aqui. E 28?

Bruno: É par.

Eu: Porquê?

Bruno: Porque acaba em 8.

Eu: E 8 é par porquê?

Margarida: Porque é de dois em dois a partir do 0

Eu: Lembram-se dos amigos gémeos?

Gisela: É do Cuisenaire?

Eu: É. Não se lembram de termos feitos comboios de réguas com amigos gémeos, e outros sem amigos gémeos?

Margarida: Ó Pascal, mas isto é da 1ª classe...

Eu: Então, podemos voltar para o 3.º ano. Quantos números pares temos?

Vários: Dois.

Pedro: Porquê?

Bruno: Porque é o 28 e o 46.

Eu: Circundo-os em azul. E quantos ímpares é que temos?

Ana Isabel: 3

Eu: Circundo-os em vermelho.

Agora, lembram-se da grelha do Flint.

Pensam um pouco o que acontece quando somamos.

Leila: Somamos Pascal?

Marlene: E conta de mais?

Eu: O que achas?

Marlene: Penso sim.

Eu: Vou fazer um pequeno cartaz para nos lembrar das palavras *somar, subtrair, multiplicar e dividir*.

Hugo: Par mais par dá par.

Eu: Então estes dois números dão par (aponto-os e ligo-os).

Ivan: Ah! São três ímpares, dá ímpar.

Eu: Porquê?

Ivan: Porque... não sei dizer.

Bruno: Espera! Ímpar + ímpar é par.

Eu faço a ligação.

Eu: E agora, o que temos?

Margarida: Par mais par mais ímpar.

Eu: Então, e par mais par é?

Vários: Par.

Eu: Portanto, fica par mais ímpar.

Ruben: É ímpar.
Gisela: Flint é muito esperto!

As crianças escravas

(3º ano)

A notícia divulgada pelos jornais televisivos que um barco pirata estava a deriva com 150 crianças escravas à bordo, aqueceu bastante o momento de *Contar e Mostrar* daquele dia. As crianças que se manifestavam, estavam chocadas: se para uns era inconcebível que se fazia trabalhar crianças sem as pagar, outros viam mais longe e perceberam outros aspetos da notícia:

Marlene: Os pais não sabem onde estão?
Ana Paula: Foram raptados?
Eu: Também. Mas percebi que às vezes são os próprios pais que os vendem.
Ivan: Mas também pode ser por serem enganados. Pensam que vão trabalhar para a cidade e ganhar mais.
Eu: Também ouvi esta versão.
Pedro: São muitos Pascal?
Hugo: São 150!
Pedro: Não, não é isso. Há mais?
Eu: Não sei. Mas não deve ser alguma coisa que só aconteceu agora.

No fim de semana a seguir, o semanário *Expresso* trazia uma reportagem de dupla página, com muitos dados. Afinal, o problema era muito mais vasto![40]

[40] O que levou a um trabalho que integrou um caderno sobre os direitos das crianças. Ver arquivo da turma.

Levei o artigo para a sala. Ficou afixado no quadro.

Descobrimos que há crianças escravas em todos os continentes, mesmo na Europa, onde muitas vezes são obrigadas a mendigar.

Rui: Mas Pascal disse o outro dia que o Brasil já não tinha Portugueses, porque não queriam mais escravos.

Eu: Para já, o Brasil não é o mundo, e depois, não eram só os Portugueses a comprar e vender pessoas.

Ruben: São mesmo piratas a sério, como aqueles que vimos no teatro?

Eu: Eu penso que são piores, os do teatro só estavam a procura de um tesouro.
Mas então querem ver um pouco o que o jornal nos diz?

E perante a concordância generalizada, continuo:

— Leio aqui que não todas as crianças são obrigadas a fazer a mesma coisa: os que vivem na África vão muitas vezes para nas plantações de cacau e de algodão.
Os meninos que vivem na Ásia trabalham para os pais ou para patrões, muitas vezes perto ou dentro da fábrica. Fazem muitas coisas diferentes.
Os meninos na Europa servem sobretudo para mendigar.

Desenho a seguinte grelha no quadro com as poucas informações numéricas que o jornal revela:

África	
África Central	200 000
Sudão	38 000
Ásia	
Bangladesh	496 000
Indonésia	300 000
Tailândia	300 000
Europa	
Grécia, Itália	3 000

Aviso que este quadro não retrata a realidade do mundo, mas só alguns dos dados que o jornal fornece. Procuramos que totais é que isto dá por Continente.

Há só algumas dúvidas, que têm mais a ver com a localização dos países do que com a inserção dos sub-totais:

África	238 000
África Central	200 000
Sudão	38 000
Ásia	1 096 000
Bangladesh	496 000
Indonésia	300 000
Tailândia	300 000
Europa	3 000
Grécia, Itália	3 000

Quando pergunto de seguida quantas crianças são ao todo, as opiniões dividam se:

Ruben: Então, agora é somar tudo.

Ivan: Agora é somar todos os países.

Marlene: Eu acho que é uma conta de mais.

Ana Paula: É uma conta de mais muito grande!

Gisela: Não, só é preciso juntar os números dos continentes.

Ivan: Dos continentes? Dos países.

Ana Margarida: Acho que a Gisela tem razão, é dos Continentes, porque, prontos, já fizemos a conta dos países.

Eu: Então, uns podem fazer a soma dos Continentes, outros podem fazer a soma dos países. Logo se vê.

Em dois grupos, a turma faz as somas. Rapidamente chegamos a conclusão que nos dois casos o resultado é o mesmo: 1.337.000 crianças!

Bruno: Isto é muito, Pascal!

Eu: É. São mais crianças do que todas as crianças que vivem em Lisboa, Oeiras, Cascais e Loures juntos.

Ivan: E todos são crianças escravas?

Eu: De uma maneira ou outra, sim!

E vejam, ainda há uma outra notícia: diz aqui que de todas as crianças que trabalham no Brasil, 22% não recebe salário. Mas não dizem quantas crianças são.

Gisela: 22% é 22 em cada cem, não é?

Eu: Sim. Poderíamos imaginar que são 500.000 crianças que trabalham (deve ser muito mais, não tenho ideia) Quantas então seriam que não recebem salário?

Tiago: Muitos.

Rui: São quantos Pascal?

Eu: Não sei, mas imaginemos 500.000

Ana Paula: Podemos ver para 500, e ... não esquece...

Eu: O que ias dizer?

Ana Paula: É também aquilo de pôr ou tirar 0?

Ivan: Já sei! É só juntar 3 zeros, dá... 22.000.

Eu: Estão no bom caminho, mas, lembram-se que é 22 em cada 100. Em cada 100!

Marlene: A! Então para 200 são 40 ... e 4.

Eu: Sim senhora! E para 400?

Bruno: É duas vezes 44, é ...

Tiago: 88!

Eu: E agora, quanto falta para 500.

Ivan: Falta 100.

Ana Margarida: É mais 22.

Ruben: Então é 122.

Eu: Calma, não baralhas!

Tínhamos 88 para 400 e falta mais 22 para 100 para fazer quanto para os 500?

Ruben: Aaaah!...

Hugo: É 110!

Eu: E para os 500.000?

Ivan: Agora é que é com os zeros.

Eu: Pois é! 500.000 é quantos vezes mais do que 500?

Ana Margarida: 1000 vezes. São mais três zeros.

Eu: Então quantos seriam a trabalhar sem ganhar?

Ivan e Gisela: 110.000!

Ana Paula: Puxa Pascal, tantos?

Eu: E provavelmente são muitos mais.

Gisela: Temos que escrever uma carta aos políticos.

E escrevemos para os grupos parlamentares por correio electrónico. Só tivemos resposta do PP, dizendo que precisavam de mais informação. (Publicamos as cartas no nosso caderno "*Os direitos da Criança*"). Mandamos alguns dados, mas nunca mais tivemos resposta. Os outros grupos não responderam.

Extensão dos números quadrados.

(2º ano)

Com o material Cuisenaire, proponho analisar o número 36, para podermos continuar a preencher a nossa tabela de Pitágoras.

As crianças formam, em pequenos grupos, comboios e tapetes de uma só cor. No fim, pergunto que tapete se sobrepõe ao tapete com as réguas nove. A pergunta já é considerada uma pergunta de rotina.

Figura 31. Análise da tabuada.

Núria: O 4.

Érico: É o quatro, sim.

Eu: E agora, conseguem por um tapete sobre o tapete de réguas 3?

Margarida: São 12 réguas.

Paula: Não dá.

Eu: Porquê?

Margarida: Deveríamos ter réguas 12, e não temos.

Eu: Pronto, portanto, este não entra na grelha de Pitágoras que temos aqui na parede. Não temos réguas 12 e não temos o número 12 na primeira linha, nem na primeira coluna. E o tapete de réguas 2, conseguem cobri-lo?

Vários: Não.

Eu: Porque?

Núria: Não temos réguas 18.

Fixamos que 9 x 4 = 4 x 9 = 36, que 18 x 2 = 2 x 18, que 3 x 12 = 12 x 3. Ainda há as réguas 6. Estas também não têm nenhuma outras para as tapar. Só depois de algum tempo é que a Gisela diz que as réguas 6 fazem um quadrado.

Inscrevemos os números na tabela de Pitágoras, com a promessa de voltar a falar de quadrados e números quadrados.

O problema do Ruben

(3º ano)

---

7 de Março

Ruben traz uma estrela colorida para o momento de *Contar e mostrar* e conta que a avó lha deu, dizendo que já era do avô dela.

Ii, exclama Pedro, então já deve ter pelo menos 1000 anos!

Eu respondo que talvez não mil anos, mas que podemos tentar saber mais.

Peço Ruben de tentar de saber que idade tinha o avô da avó quando ela nasceu.

---

13 de Março

O Ruben já nos informou que o avô da avó tinha 52 anos quando ela nasceu.

Escrevo no quadro:

Ruben mostrou uma estrela que era do avô da avó.

Ele tinha 52 anos quando a avó do Ruben nasceu.

A avó do Ruben tinha 36 anos quando o Ruben nasceu. O Ruben tem 10 anos.

Qual será a idade mínima da estrela?

Tatiana Helena: É bué fácil.

Ivan conta pelos dedos 52 até chegar ao 36. Depois diz: não estou a contar 52 mais 36.

Eu: Talvez há uma maneira mais fácil para fazer a conta.
Hugo: Posso juntar 52 mais 36, para saber a idade da estrela.
Eu: Achas que chega? Pensa bem.

Gisela: Estou a fazer bolinhas para a soma. Cada bolinha é um ano.
Bruno: É 88.
Eu: 88 quê?
Bruno: 88 anos.
Ivan: Não. Falta o Ruben. 88 anos é até o Ruben nascer.
Gisela: Então é 52 + 36 + 10.

Ana Paula e Marlene já tinham feito a mesma conta com a máquina calculadora.

Pergunto o porquê dos valores.

Marlene: Porque é desde que o avô da avó do Ruben nasceu.
A avó dele tem agora 46 anos. Todo junto são 98 anos.
Eu: Então são 98 anos?

Estes dois grupos ficam convencidos que encontraram a solução e iniciam o trabalho autónomo previsto no plano diário, enquanto começo a discutir com algumas crianças que ouviram a conversa, escreveram 98 e não pensaram mais no assunto.

Eu: Então porque é que escreveram 98?
Pedro: Porque...
Rui: Porque é a idade da estrela.
Eu: Mas porque é que dizem que isto é a idade da estrela. Como sabem isso?
Hugo: Porque fizemos a conta.
Eu: Está bem. Mas esta conta não vem por acaso. Copiaram-na ou souberam porque é?
Adramane: Já sei: é as idades todos juntos para saber quando o avô da avó nasceu.
Eu: Muito bem. Isto percebi. Agora o que tem isto a ver com a estrela?
Pedro: Então, a estrela é do avô.

Eu: Desde que ele nasceu?

Hugo: Ah! Só se o pai dele comprou para ele bébé!

Eu: Portanto, podemos dizer que a estrela tem 98 anos no mínimo?

Rui: Sim.

Pedro: Não, pode não ser.

Hugo: Pode ser que o avô comprou quando a avó nasceu, então tem pelo menos 46 anos.

Eu: Acho que depois do recreio, têm que falar com os outros e explicar o que descobriram.

Depois do recreio, interrompemos o momento de trabalho autónomo e Hugo explica:

— Não sabemos se a estrela tem 98 anos. Pode ter muito menos, se o avô comprou quando a avó nasceu.

Ivan: Também pode ter comprado quando era criança.

Gisela: Ou pode ter recebido como prenda de anos.

Ana Paula: Ou como prenda de Natal.

Tatiana: Ou como prenda de comunhão.

Eu: É tudo possível. Não é preciso dar todas as possibilidades. Mas então, a estrela tem com certeza no mínimo 98 anos?

Ruben: Se o avô já a tinha quando nasceu sim.

Margarida: Pergunta.

Ruben: Oh! parvinha, ele já morreu.

Eu: Então com o que sabemos? Esta conta que fizemos dá nos alguma certeza acerca da estrela?

Vários: Não!

Eu: E dá nos que informação?

Ivan: Que a estrela tem pelo menos 46 anos... ah não, ele pode ter comprado a estrela depois da avó do Ruben nascer.

Ana Paula: Oh! Assim não dá nada!
Eu: Mas sabemos pelo menos há quanto tempo que o avô da avó nasceu!
Muitos: Há 98 anos.
Eu: Exato. Para a estrela não temos certezas.
Ivan: Até porque não sabemos quanto tempo esteve na loja.
Gisela: Ou na fábrica!
Eu: Então concluímos:
Sabemos que o avô da avó nasceu há 98 anos.
Da estrela não sabemos qual é a idade mínima, mas deve ser menos do que 1000 anos e provavelmente menos de 98 anos.

Datas capicuas

(4º ano)

São 9:50. Começamos o momento de problema. Escrevo a data de amanhã no quadro: 20 02 2002 e pergunto:
– O que o número da data de amanhã tem de especial?
Leila: É dia da piscina.
Eu: É verdade. Mas estava a perguntar o que o número tem de especial.
Adramane: Só tem 2 e 0
Marlene: Tem duas vezes 2002.
Ivan: Tem 2 dois zeros dois 2 e dois zeros e um 2.
Ruben: É igual!
Eu: Pois. Tudo isso é verdade. Agora, o que o Ruben disse, fez me lembrar outra pergunta. Lêem o número da esquerda para a direita, e depois da direita para a esquerda.

Ana Paula: Isto é fácil, Pascal. É igual.

Gisela: É. É igual, é dois zero zero dois dois zero zero dois, e ao contrário também é.

Mário Sérgio: Pois é. É engraçado.

Eu: Os números e as palavras que se podem ler assim, tem um nome especial: chamam-se capicuas.

Gisela: Isto quer dizer o quê, esta palavra?

Eu: Quer dizer isso mesmo: lemos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita, mas o que lemos, é a mesma coisa.

Margarida: Há palavras assim também?

Eu: Há.

Tiago: Ana.

Eu. Pois, *ama* também. E há mais. Mas agora, voltamos às datas. Vamos procurar datas capicuas do século atual.

Ivan: De 2002?

Eu: Não, do século todo. Já agora, quando é que começou?

Adramane: 1 de Janeiro de 2001.

Escrevo: 01 01 2001.

Eu: E quando é que acaba?

Ruben: Em 3000.

Eu: Não, isto é o fim do milénio, não do século.

Gisela: Em 2010.

Eu: Não. Esperam e pensam antes de responderem. Quantos anos tem um século?

Marlene: Ah! É 2100.

Eu: E em que data?

Bruno: Dezembro.

Marlene: 31 de dezembro.

Eu: Portanto, procuramos datas capicuas entre 01 01 2001 e 31 12 2100.

Alguns pares começam a fazer algumas tentativas, outros ficam a espera.

Gisela: Oh Pascal, não percebi muito bem.

Hugo: Tenho um: 30 03 3003.

Eu: É capicua, mas não é deste século.

Paula: Podes dar um exemplo, Pascal.

Eu: Então, a data de amanhã é um. Mas vejam: 10 02 2001.

Sérgio: Este já foi.

Eu: Foi. Mas é capicua, ou não?

Marlene: É. Ah! Já percebi! Espera.

Eu: Vá. Vejam se encontram outras datas.

À medida que vão surgindo propostas, escrevo-as no quadro:
30 02 2003 (Hugo).

Ninguém, nem eu, repara naquele momento que não pode ser, devido ao entusiasmo de uma nova data encontrada.

01 02 2010 (Marlene)
13 02 2031 (Ruben, que primeiro tinha escrito 2013, mas depois emendou)
04 02 2040 (Margarida)
05 02 2050 (Ruben)
06 02 2060 (Hugo)
02 02 2020 (Hugo)
07 02 2070 (Bruno e Hugo)
08 02 2080 (Adramane e Gisela)
09 02 2090 (Leila, depois de ter experimentado 90 02 2009, e constatar que não existe o dia 90 de Fevereiro)
21 02 2012 (Margarida)

21 12 2112 (Ivan). Constatamos que não é deste século.

24 02 2042 (Margarida)

Mario Sérgio: Com 2100 não dá porque não há nenhum mês com o dia 00.

29 02 2092 (Adramane)

Eu: Esperem um pouco. Adramane propõe 29 de Fevereiro de 2092. Pode ser?

Marlene: Se há 29 dias. Mas não há, são 28. 29 já foi.

Eu: De quanto em quanto anos é que fevereiro tem 29 dias?

Ivan: Três, não quatro.

Vários: Sim, quatro.

Eu: Então, temos que ver se 2092 faz parte destes anos. Como sabemos isso?

Ruben: A última vez, foi quando?

Eu: Alguém se lembra?

Adramane: Foi em 1999?

Eu: Não, não foi.

Marlene: Foi em 2000.

Eu: Foi sim.

Marlene: Então não é porque acaba em dois.

Eu: Tens a certeza?

Marlene: Então agora é 2002 e também não é, porque não são 4 anos.

Margarida: Mas pode ser.

Gisela: 92 é múltiplo de 4?

Eu: Porque é que perguntas isto?

Gisela: Porque 2004 tem 4, é múltiplo, penso eu.

Eu: E pensas bem.

Margarida: É mais fácil contar ao contrário.

Ivan: 2100 é múltiplo?

Eu: É

Marlene: Espera. Então 2096 é. Mas depois é 2090.

Margarida: Não. 96 menos 4 é 92.

Ivan: Então dá!

Eu: Portanto, podemos pôr a data proposta por Adramane. Já agora, sabem como se chamam os anos em que Fevereiro tem 29 dias?

Ivan: Capicuas?

Eu: Não, capicuas são as datas que estamos a procurar.

Ninguém se manifesta.

Eu: São anos bissextos.

Ainda aparece 19 02 2091 do Ruben, e vamos para o intervalo. Depois do intervalo, discutimos:

Eu: Então, vamos arrumar o assunto. Já viram alguma coisa de especial nas datas?

Bruno: São todas de Fevereiro.

Eu: Porquê?

Ivan: Porque o ano tem 2.

Marlene: E zero!

Margarida: O 02 dá 20.

Eu: Então, neste século haverá outras datas capicuas?

Vários: Não.

Eu: E então, quantas datas são?

Olhamos melhor para o quadro, e reparamos no 30 02 2003.

Gisela: Aquele primeiro do Hugo, não pode ser.

Paula: Não, não há 30 de Fevereiro.

Eu: Pois não, há um bocado não reparámos. Mas quantas datas capicuas temos neste século?

Marlene: Então são 29.

Eu: E não há outras? Ivan e Marlene disseram que o ano tem dois e zero, mas o último ano tem dois e um.

Margarida: Isto dava com Dezembro.

Eu: Sérgio, o que disseste há um bocado?
Sérgio: Já não sei... Ah! Sim. Não há 0 de Dezembro.

Escrevemos a nossa conclusão:

No século XXI, temos 29 datas capicuas, porque são todos os dias de Fevereiro, e 2092 é um ano bissexto.

Eu: Já agora, só por curiosidade; Haverá datas capicuas no século XXII?
Gisela: Começa com quê?
Hugo: Com 2101
Eu: E acaba?
Marlene: Em 2200.
Margarida: Então não há. Sim, há, é o contrário do 21, é 12 é Dezembro.
Eu: Então serão quantas datas?
Paula: Deve ser 31.
Eu: Porquê?
Ivan: Porque Dezembro tem 31 dias.
Eu: E o século XXIII?
Sérgio: Não tem, porque é com 22 e não há mês 22.
Eu: Então, vivemos num século especial. Não todos os séculos têm datas capicuas. Os vossos bis bis bis bis netos não poderão fazer um problema com datas capicuas no século deles.
Marlene: Até porque talvez, naquele tempo, já não vai haver escola!
Eu: Pois, ninguém sabe.

São 11:45. Começamos o trabalho de plano, dando prioridade ao atelier de matemática.

Estatística e probabilidades

(organização e agrupamento de dados)

A viagem transatlântica

(3º ano)

Rui apresenta este problema:

Enunciado.

Um homem que estava na América do Sul queria vir para Portugal.

1. Tenta descobrir como é que ele veio.

2. Descobre os transportes que ele utilizou até aonde.

Nota: não vem de avião.

Perante esta proposta de trabalho, a turma organiza-se em pequenos grupos para discutirem a situação. Combino com as crianças que podem fazer perguntas enquanto discutem e que estes serão tratadas de seguida. Depois de pouco tempo, aparecem as seguintes perguntas:

1. O homem tem carro?
2. América do Sul tem comboios?
3. Onde é que ele estava?
4. Havia barcos?
5. No oceano, havia porto?

Enquanto estas perguntas ficam a aguardar resposta, surge um levantamento de possibilidades.

- Comboio e barco;
- Barco grande;
- Boleia;
- Camioneta e barco;
- Carro e barco;
- Trotineta e submarino;
- Barco à vela;
- Carro e comboio;
- Nave espacial;
- Navio e submarino;
- A nadar.

Deixando por enquanto as sugestões de lado, pegamos nas perguntas formuladas. Rapidamente constatamos:

1. Não sabemos.
2. Sim.
3. Não sabemos.
4. Existem barcos na América do sul.
5. A pergunta é demasiado vaga. Existem portos no oceano Atlântico e Pacífico.

O "*não sabemos*" como resposta a primeira e terceira pergunta, não satisfaz muita gente. Exigem uma resposta mais precisa:

— Ó Pascal, mas então, tem ou não tem carro?

— Como querem que eu digo, eu também não sei!"

Viram se todos para Rui: "Tu sabes, diz–lá como é que é?" E Rui responde: "Mas eu também não sei, não conheço o homem, só inventei este problema, para saber como é que um homem pode vir da América do Sul para Portugal."

Esta resposta pragmática, fez uma parte do grupo procurar ca-

minhos e horários, por um lado com o apoio de uma colega de turma brasileira e, por outro lado, com os já habituais telefonemas para instituições que nos podiam informar melhor: serviços de turismo, embaixadas, empresas de transporte[41].

A partir daí surgiram hipóteses de viagens de comboio até duas cidades portuárias, uma no Brasil, outra na Guiana, algumas ligações marítimas das quais uma até Le Havre (na França) e outras tantas vias para chegar a Portugal, por comboio ou por autocarro.

Tratou-se dum trabalho de investigação rotineiro, que, obviamente, tinha que recorrer à utilização de alguns utensílios aritméticas, introduzindo algumas novidades no cálculo com números complexos. Mas, o meu interesse estava virado para o aproveitamento ao nível do raciocínio lógico.

Propus no dia a seguir:

— E se organizássemos um pouco as respostas, que critério podemos então utilizar?"

Num primeiro momento, utilizamos como chave de classificação possível / impossível.

O critério "impossível" gere grandes discussões em volta das opções "nave espacial" e "a nadar".

E, bem vistos as coisas, Paulo (que propus este feito olímpico), tem uma explicação razoável:

— Então e se o homem estivesse a bordo dum paquete de luxo, porque é que não poderia fazer a travessia na piscina do barco?

Da mesma forma, David defende a sua dama:

---

41 Estamos em 1989. A consulta por computador e na Rede ainda eram miragens. A turma tinha uma agenda de contactos bem úteis para as perguntas para as quais a biblioteca escolar não oferecia resposta.

— Não vejo porque é que a nave espacial não pode ser. A Ariane é lançada numa base francesa na América do Sul. O homem está dentro da cápsula, depois, quando sobrevoo Portugal, faz descer a cápsula e sai de para-quedas.

É aceite que só *carro* e *comboio* parecem impossível, até que alguém se lembra dum filme que narra uma corrida de Nova Iorque para Paris, propondo um carro num icebergue a passar o estreito de Bering.

Mudamos o critério *possível/impossível* para o critério *provável/pouco provável*, e surge-nos um novo dado. Este critério depende fortemente da pessoa: o submarino é muito provável para um capitão da marinha, mas pouco provável para um simples turista. O barco a vela é muito provável para um campeão do Cutty Sark, mas pouco para quem nunca andou de barco no alto mar. Esta discussão abre outra sobre a relatividade das coisas. Chegamos a uma formulação: "*A probabilidade para algo ser possível depende muito das pessoas envolvidas*".

Mais tarde, depois de termos conseguido um sonho que à partida parecia de difícil realização, a formulação alterou para:

"*O acontecimento depende das circunstâncias em que ocorre*".

Mas, alguns dias depois, e só para pensar ainda mais um pouco sobre o enunciado e a sua resposta, proponho outra situação: e se nós escrevêssemos uma resposta, para de seguida construir o enunciado. O que isto dá?

A resposta construída coletivamente é assim:

O homem vai de carro até Rio, apanha o Normandie até o porto de Le Havre e vem de comboio até Évora, passando por Paris.

Depois de muitas tentativas, ficam 3 enunciados possíveis para esta resposta. Estes três enunciados são analisados de mais perto:

1. *O homem apanha três transportes, dois terrestres e um naval. Um até Rio, outro até a capital do Alentejo, passando pela capital da França. O naval vai até o porto de Le Havre.*
2. *Foi por terra em transporte próprio até Rio transporte de 4 rodas sem animais, apanha um navio francês até "Le Havre" e foi por via férrea até Évora.*
3. *Veio em três transportes, dois terrestres e um Naval que apanhou num porto francês. Foi de via de ferro até a capital do Alentejo, passando pela capital da França.*

Mesmo assim nenhum destes "enunciados" convence.

Rui considera que assim não vale a pena, o enunciado tem que conter todos os elementos da resposta, e então não é problema.

David considera que não é bem assim, que se trata dum problema aberto e portanto não vale fazer enunciados para um homem preciso.

É verdade que as nossas conclusões lógicas são de outro nível que o trabalho de levantamento de dados sobre transportes não aéreas entre América do Sul e Portugal.

A festa de Magusto - Análise de dados.

(3º e 4º ano)

O trabalho que aqui relatamos foi feita no ano lectivo 1990-1991, por duas turmas, uma de 3.º e uma de 4.º ano de escolaridade[42].

No dia a seguir à festa do Magusto, houve nas duas turmas várias novidades acerca das rifas compradas. Na discussão que se desenvolve, chega-se à conclusão que uns foram mais "sortudos" que ou-

42 Este relato foi escrito a meias com Dora Agostinho. Trabalhávamos na altura "paredes meias" na Escola da Voz do Operário da AJuda.

tros. Mas esta discussão gera polémica:

- O que quer dizer ter mais sorte do que os outros?
- Quais são os critérios que utilizam para decidir tal?
- Os critérios são utilizados da mesma maneira, quando se trata de comparar a sorte dum amigo, com a sorte de alguém com quem não há grandes amizades?

Propomos então, nas duas turmas, que cada um responda às seguintes perguntas — previamente combinadas em conjunto.

1. Quantas rifas compraste?
2. Quanto pagaste ao todo?
3. Quantas prendas te saíram?
4. Quanto é que pagaste em média por prenda?

Cada pessoa respondeu às perguntas, segundo o seu caso pessoal. Da recolha destas respostas resultou o seguinte quadro:

nome	dinheiro gasto	nº de prendas	preço / unidade	nome	dinheiro gasto	nº de prendas	preço / unidade
Alexandre	260	5	52	Joana	150	1	150
Ana Raquel	150	5	30	Leandro	400	10	40
André	200	2	100	Luzia	200	5	40
Catarina	200	2	66,50	Marta M.	200	16	12,50
Daniel	20	1	20	Nuno	100	5	20
David C.	250	4	62,50	Paulo	100	4	25
Débora	700	4	175	Rita	100	2	50
Duarte	150	5	30	Rodrigo	100	9	11
Elisabete	200	1	200	Rui	150	1	150
Filipa	200	5	40	Sandra	500	4	125
Frederico	600	3	200	Sara (3º)	50	0	?
Hugo	150	5	20	Sara (4º)	150	5	30

nome	dinheiro gasto	nº de prendas	preço / unidade	nome	dinheiro gasto	nº de prendas	preço / unidade
Inês (3º)	200	3	66,50	Tiago (3º)	220	4	55
Inês (4º)	150	3	50	Zélia	120	4	30

Para chegar aos resultados inscritos neste quadro, tivemos que reativar algumas ideias relativamente à divisão. Algumas crianças do 4º ano lembraram-se como foi construído o jogo *Scrabble©*, o que ajudou para elaborar uma equação:

$$\frac{\text{Dinheiro Gasto}}{\text{Prendas}} = \frac{\text{Dinheiro}}{\text{Prenda}} = \frac{Dg}{Np} = \text{Preço por Unidade}$$

No dia a seguir começamos a discutir "*Quem é que tinha tido mais sorte?*" Como não definimos critérios à partida, da discussão em pequenos grupos, surgem estes hipóteses:

Nome	Dinheiro gasto	nº de prendas	Preço por unidade
Elisabete	200	1	200
Marta	200	16	12,50
Leandro	400	10	40
Rodrigo	100	9	11
André	200	2	100

A maioria das pessoas elegem Marta como sendo a que teve mais sorte. Duas crianças, André e Elisabete elegem-se a si próprio. Leandro aparece por ser quem, no terceiro ano, é considerado o mais "sortudo". Rodrigo é apontado por quatro alunos.

Para definir o conceito sorte, foi portanto considerado:

- o maior número de prendas define a maior sorte. (Marta)
- a razão Dg/Np tende para 10 define a maior sorte. (Rodrigo)

Não é explicitada a terceira hipótese:

- o menor dinheiro gasto define a maior sorte. (caso do Daniel)

Procuramos então explicitar os parâmetros utilizados nesta tabela. A discussão continua muito acesa. Convencemos André, Elisabete e Leandro, de que não são as pessoas com mais sorte, mas não se chega a um acordo perante Rodrigo e Marta. Pelo contrário. Na discussão surge a explicação: "*Marta teve mais sorte porque teve mais prendas*", como também surge: "*Rodrigo teve mais sorte, porque pagou menos por prenda*".

Propomos analisar melhor a relação que estabelecemos.

Evidentemente, a equação podia ensinar-nos alguma coisa: quando o dinheiro gasto aumenta, o preço por unidade também aumenta, quando o número de prendas aumenta, o preço por unidade baixa.

Logo, quando diminuímos o dinheiro gasto e ao mesmo tempo aumentamos o número de prendas, aproximamo-nos mais depressa dum limite.

Rui consegue formular esta constatação da maneira seguinte:

— Se eu tivesse 10 prendas para 100 escudos, então teria a sorte máxima, já que cada rifa custa 10 escudos. As prendas não podem custar menos que 10 escudos.

Isto abre outra perspectiva. Nós, professores, argumentamos:

— com 100 escudos, o máximo de prendas são 10, e Rodrigo teve 9.

— com 200 escudos, o máximo de prendas são 20, e Marta teve 16.

  Então Rodrigo esteve mais perto do máximo de prendas possíveis, porque só lhe faltou 1 em 10, enquanto à Marta lhe faltaram 4 em 20.

Para muitas crianças (sobretudo do 4.º ano) isto é um bom argumento para considerar Rodrigo como quem teve mais sorte. Para as outras, continua a valer que afinal de contas, Marta teve 16 prendas e

Rodrigo só 9.

Lançados como estamos, quer se agora também procurar quem teve mais azar. As opiniões continuam difusas:

Nome	Dinheiro gasto	nº de prendas	Preço por unidade
Elisabete	200	1	200
Frederico	600	3	200
Sara	50	0	?
Zélia	120	4	30
Raquel	150	5	30
Daniel	20	1	20
Joana	150	1	150
Rui	150	1	150

Entre os mais velhos começa a haver dúvidas.

Puseram de lado Débora, que gastou ainda mais dinheiro que o Frederico. Isto porque, as prendas de Elisabete e Frederico ficaram cada uma em 200 escudos enquanto Débora “só” gastou 175 escudos por prenda. Mas, mesmo tendo gasto menos dinheiro, Frederico teve só 3 prendas, Elisabete só uma. Então, Elisabete teve mais azar?

“Então, disse Daniel, eu também tive azar, como Joana e Rui.”

David repara: “Há quem não teve nenhuma prenda. Primeiro, os que não estiveram cá no dia da Festa do Magusto, e depois, Sara que gastou dinheiro e que não teve nenhuma prenda.”

Agora, a discussão é mesmo acesa:

— Não podes incluir os que não estiveram cá!

— Assim, também podes dizer que tiveram mais sorte, porque não gastaram dinheiro em rifas...

— Sara só gastou 50$00.

— Há outros que gastaram muito mais, e além disso, pagaram muito mais por prenda.

Agora, e ao contrário da discussão em torno do conceito de sorte, formulam-se claramente três hipóteses:

1. Quem gastou mais teve mais azar. (Débora)
2. Quem teve menos prendas teve mais azar. (Sara ou Elisabete, Joana e Rui)
3. Quem tem o custo por unidade maior é que teve mais azar. (Frederico e Elisabete)

Desenvolvemos o trabalho, só com o grupo do 4º ano.

Recapitulamos o raciocínio que utilizamos para chegar ao conceito de sorte:

> *Se, ao mesmo tempo, diminuímos o dinheiro gasto e aumentamos as prendas, chegamos ao limite: quem está mais próximo de 10$00 por prenda teve mais sorte."*

Não é considerado a situação de Daniel, porque, implicitamente, se mistura o critério de menos prendas, com o critério de custo por unidade.

Já foram apontados Frederico e Elisabete como tendo mais azar, porque tem o valor por prenda mais alto. É só saber se este valor pode ser ainda mais alto, e se sim, qual o valor limite.

Provocamos: "Para já podemos pôr a questão de quanto é que Sara pagou por prenda."

Algumas crianças respondem "zero", outras respondem "50 escudos".

Mas Rodrigo não concorda:

— Se Sara tivesse pago zero escudos, então teria tido ainda mais sorte do que eu. E como não teve prenda e gastou dinheiro, isto não está certo."

Outro avança:

— Mas a Sara pagou 50$00 por uma 'prenda' que não teve.

Eu: Pode se então dizer que Elisabete e Frederico têm mais azar?; isto é: ter uma prenda cara é mais azar do que não ter prenda barata?

Hugo: Para acharmos o preço por prenda, dividimos o que pagamos pelas prendas que obtivemos.

David: Então é simples, é dividir 50 por 0."

Novo desacordo.

Paulo: (*que integrou a turma no ano passado e já esteve no 3º ano em outra escola*): Não se pode dividir por 0.

Como não me manifesto, os outros não acreditam. David está em apuros com o algoritmo da divisão: "Só dá zeros!"

No programa **LOGO**, o computador responde a Daniel e Sandra: "*Não divido por zero*".

As máquinas calculadoras apresentam um ***E***, ou um zero com ***ERROR*** por cima.

Os outros meios auxiliares não dão grande resposta.

Proponho o símbolo ∞ mas este só alerta uma ou duas crianças:

— Isto, já vi num livro" é a resposta.

O problema fica em aberto, enquanto as crianças vão procurar informação acerca do símbolo, e eu uma maneira para lhes mostrar que quando o número de prendas tende para 0, o dinheiro gasto por prenda tende para ∞.

Alguns dias depois, Rui e Inês, que levaram o trabalho para casa e que tiveram uma conversa com os respetivos pais, têm ambos a resposta para o símbolo: *é o infinito.*

— E isto quer dizer o quê?

— É o número maior?

— Não, é maior do que qualquer número.

— É algo onde nunca se chega.

— Explica.

— Então, é como o horizonte: a gente pode ver o horizonte, mas nunca chega lá.

(*Isto é uma forma bonita para explicar que por mais que se aproxime do infinito, se continua à mesma distância*).

Aproveito:

Entretanto, eu tenho algo para vos mostrar: fazemos a seguinte multiplicação: ***3 x 10***.

Coro: É 30.

Eu: E x 100.

Coro: É 300.

Eu: E x 1000

Coro: É 3000

Eu: E agora, vamos multiplicar com 0,1.

Há quem recorre à maquina calculadora, e passa depois para a grelha decimal, mas todos concordam: é 0,3.

— E x 0,01

— É 0,03

— E x 0,001

— É 0,003

— Bem. Conclusões: quando multiplicamos por um número 10 vezes maior, o resultado é 10 vezes maior. Quando multiplicamos por um número 10 vezes menor, o resultado é 10 vezes menor. Agora, passando para a divisão:

— 50 : 10?

— É 5.

— 50 : 100?

— É 0,5

— 50 : 1000?
(*algumas calculadoras...*)
— É 0,05
— E agora, pensam bem: 50 : 0,1
Antes de fazer a conta, tentem perceber o que se passa. Lembrem o que se passa quando multiplicamos por um número cada vez mais pequeno. E por um número cada vez maior. Agora, voltem a pensar na divisão.

Depois de alguns momentos, Inês arrisca:
— Na divisão o quociente pode ser maior do que o dividendo?
— Porque não?
— Então, será 500?

Os outros controlam: computador, máquina de calcular. Parece que sim.

Agora, é fácil: 50 : 0,01 = 5.000; 50 : 0,001 = 50.000; 50 : 0,0001 = 500.000. Para números maiores temos que recorrer ao computador. David e Rui vêem a luz:
— Então, a Sara teve infinitamente azar"
— Para a Sara a gente deveria dividir por 0 o que dava um número tão grande que é infinito."

No meio ficou o início de uma discussão particular com Inês que considera: "*A maior coisa é o infinito. A menor, não é o zero, é o infinito negativo ... ou talvez seja o mesmo infinito.*"

Scrabble

(3º ano)

Propus à turma construirmos um *Scrabble*© português para a sala[43], para o qual tinha já desenhado e plastificado o tabuleiro.

Faltavam as letras. Sugeri que procurássemos uma distribuição das letras do alfabeto, no total de 100.

Como fazer?

Paulo pergunta quantas letras tem o alfabeto e acrescenta: "Como são mais ou menos 25, 4 letras de cada: 4 x 25 igual 100."

Rui sente que não deve ser tão fácil. Após discussão constatamos que utilizamos mais a's que x's, para só ficar com este exemplo.

David propõe contar letras. Isto gera alguma discussão. Contar letras como, onde?

Decidimos escolher uma página do livro que estou a ler para a turma e de contar todas as letras daquela página.

Fazemos seis grupos de trabalho e dividimos as letras do alfabeto entre os grupos. Tentamos que o trabalho fosse distribuído de forma mais ou menos igual. Isto revela algumas coisas interessantes: as crianças consideram:

- que as vogais são as mais importantes e frequentes. Atribuem logo uma vogal a cada um dos cinco primeiros grupos, ficando o sexto grupo com duas consoantes que pensam serem as mais utilizadas.
- que a letra ***s*** (aparecendo em todos os plurais) é menos frequente do que as letras ***d*** e ***n***. Não consideram as letras ***y***, ***k*** e ***w***, mas introduzem a letra ***ç***.

Cada grupo procura a sua própria estratégia para contar as letras

[43] Na altura ainda não existia uma edição comercial do jogo baseado na frequência de letras para a língua portuguesa.

que lhes foram distribuídas:

- num grupo, os elementos do grupo distribuem as letras entre si. Uma criança não recebe letras mas soletra o texto, e vai ditando as letras ao grupo. Cada um aponta as letras que lhe couberam.
- noutro grupo, cada elemento circunda primeiro as letras que lhes foram designadas, depois contam dois a dois as letras que escolheram.
- noutro grupo ainda, cada um aponta as letras conforme um código combinado entre os elementos do grupo para facilitar a contagem que cada um faz. Depois conferem resultados.
- em dois grupos utilizam 4 cores diferentes para realçar as letras, e depois cada elemento do grupo conta as letras numa das cópias do texto.
- o último grupo pede uma cópia do texto para cada letra da qual faz o levantamento. Cada um dos elementos lê as quatro cópias controlando o que já está apontado e o que foi esquecido. No fim registam a frequência de cada letra, contando por grupos de 5.

Após contagem, aparece o seguinte quadro:

grupo 1		grupo 2		grupo 3		grupo 4		grupo 5		grupo 6	
a	127	e	91	i	50	o	82	u	20	d	27
b	10	c	14	f	7	h	10	g	16	n	29
j	1	l	14	m	36	p	24	q	6	r	46
s	48	t	36	x	1	ç	0	z	2	v	14

Com este quadro feito, fazemos uma estimativa do total das letras. Eis os resultados:

3 crianças: entre 200 e 300 letras.

4 crianças: entre 300 e 400 letras.

6 crianças: entre 400 e 500 letras.

2 crianças e o professor: entre 500 e 600 letras.

1 criança: entre 600 e 700 letras.

1 criança: entre 700 e 800 letras.

Os outros não fazem ideia e não arriscam uma estimativa.

Controlámos a estimativa de duas maneiras: por um lado, faz-se a soma de todos os totais de letras apuradas, por outro lado, conta-se as letras de cada linha de texto, somando estes subtotais. Como por magia (*entendida de maneira diferente pelas crianças do que por mim*) os dois valores coincidem: 711 letras.

O resultado obtido abre uma nova discussão: já sabemos que neste texto de 711 letras há 127 a's, 91 e's, 50 i's, etc. . "Mas isto é mesmo assim? Isto é, qualquer texto de 711 letras dará esta distribuição?" pergunto eu.

A resposta é muito mais unânime do que eu estava à espera:

"Claro que não. Depende das palavras do texto," disse um.

"Queres uma prova? Neste texto não há nenhum ç, mas sabemos que há textos com ç, senão não existia o ç," acrescenta outro.

Afirmo à turma que esta discussão é muito importante, e que a iremos retomar, mas que existe ainda outra dificuldade: como saber quantas letras de cada é que temos que pôr no nosso jogo.

Há quem propõe tirar letras "De 711 para 100, tiramos 611 letras. Basta fazer a mesma coisa para todas elas."

Há logo um embate:

— Assim, cada letra fica em 0.
— Não, algumas ficam mais em 0 que as outras.
— Mais em zero, quer dizer abaixo de 0, como no termómetro.
— Mas se todas as letras ficam abaixo de 0, então não temos letras no jogo!

É claro que algo está mal. Proponho que representemos com o material MAB o que temos e o que queremos.

Quando peço descrever do modo mais preciso possível o que se

vê, e depois de algumas tentativas, de várias crianças, David formula:

— No monte de letras do texto, há mais ou menos 7 vezes o que queremos.

Reformulo: Queremos sete vezes menos letras do que temos.

Paulo: Se queremos 7 vezes menos, teremos que dividir."

Catarina: Podemos ver quantos grupinhos de 7 conseguimos fazer para cada letra.

Os grupos voltam ao trabalho. No quadro vai crescendo a seguinte tabela:

letra original		grupo 1	grupo 2	grupo 3	grupo 4	grupo 5	grupo 6
a	127		19		18	17	
b	10	1	1	1	1	1	1
j	1	0	1		0	0	0
s	48	6	7	6	6	6	7
e	91		2	12	13	13	13
c	14	1	2	2	2	2	2
l	14	2	2	2	2	2	2
t	36	5	13	5	5	5	5
i	50	7	7		7	8	7
f	7	1	7		1	1	1
m	36	0	1	0	0	0	1
x	1	1	0		0	0	1
o	82	9	11	11	11	11	
h	10	1	1		1	1	
p	24	3	4	3	3		
ç	0	0	0	0	0	0	
u	20	2	3		2	3	
g	16	2	2	2	3	2	
q	6	0	1	2	0	0	
z	2	0	1		0	0	
d	27	3	4			3	
n	29	4	4	4		4	
r	46	6	7	6		6	
v	14	2	2		2	2	

Os grupos 3 e 6 fartam-se de discutir a cada passo, razão pela qual decidimos interromper os trabalhos.

As propostas não convencem em muitos casos:

— Isto não dá, há muitas divisões que não dão um número certo.

— Mas pode se ir para o número mais próximo: se dá quase 2, vai se para o 2.

— Ó, Pascal, às vezes não é preciso fazer divisões, vê se logo com a tabuada. (*De facto, já tinha reparado que o grupo 1 desistiu com o* **a** *(127) e que teve grandes dúvidas com o 91 do* **e**.)

As discussões dos grupos 3 e 6 envolvem agora a turma toda: como fazer para as letras que nem sequer chegam a 7, na contagem original?

— Podemos pôr 1 ***f***, 1 ***m*** e 1 ***x***?

— E o ***h***? Podemos por 2 ou só 1. Há uma grande diferença. Mas pelo menos uma letra tem que estar no jogo, senão não o alfabeto não fica completo.

Para o grupo 2, o problema é outro: o ***f***, que tem 7 no original, também tem 7 na distribuição final. Justificação: não se pode dividir 7 por 7, portanto fica 7.

O material Cuisenaire ajuda a resolver a dúvida: de facto, pode se pôr exactamente 7 unidades por baixo da régua preta.

Sendo assim, proponho que voltemos a ver todas as propostas dos diferentes grupos e que cada grupo traga a sua "média" em função da tabela que ainda está no quadro, originando uma nova grelha[44]:

[44] Este trabalho vai ser de valor inestimável, quando mais tarde precisamos de calcular frequências e médias numa investigação feita com o software lego-logo - versão 1990.

letra original		grupo 1	grupo 2	grupo 3	grupo 4	grupo 5	grupo 6	Pascal	Final
a	127	18	19	19	18	17	18	17	19
b	10	1	1	1	1	1	1	2	1
j	1	1	1	1	1	0	0	1	1
s	48	6	7	6	6	6	6	6	6
e	91	13	13	13	13	13	13	13	13
c	14	2	2	2	2	2	2	2	2
l	14	5	2	2	2	2	2	2	2
t	36	7	7	13	5	5	5	5	5
i	50	1	7	7	7	7	7	7	7
f	7	7	1	8	1	1	1	1	1
m	36	1	1	1	0	0	1	1	1
x	1	14	1	9	0	0	1	1	1
o	82	11	-	11	11	9	11	12	11
h	10	1	1	1	1	1	1	2	1
p	24	4	6	4	3	3	3	4	3
ç	0	0	0	0	0	0	1	1	1
u	20	3	9	3	2	2	3	2	3
g	16	3	3	3	3	2	2	2	3
q	6	2	-	2	0	1	1	1	1
z	2	1	2	1	1	0	1	1	1
d	27	4	7	4	4	3	4	4	4
n	29	4	4	4	4	4	4	4	4
r	46	7	3	7	8	6	6	7	7
v	14	2	1	2	2	2	2	2	2
total	711	118	98	124	95	92	96	100	100

A escolha final não é simplesmente a média das propostas dos grupos. Por um lado, todos tivemos dificuldades em chegar a uma distribuição de cem letras, porque isto implica várias compensações, algo que as crianças dominavam mal. Por outro lado, há quem continua particularmente teimoso com a compensação para baixo de algumas letras pouco frequentes, e a compensação para cima para as letras mais frequentes. Digamos que a proposta final é uma proposta para podermos arrancar com o jogo.

Na prática, verificamos que nos faltavam algumas letras, porque as palavras do vocabulário corrente da sala implicava mais letras ***m***,

f, ***d*** e ***u***. Juntámo-las e retirámos alguns ***a***'s e alguns ***e***´s.

A rectificação final, fez-se quando apareceu o *Scrabble©* editado em versão portuguesa, com um conjunto de 120 letras. Sentimo-nos autorizados a copiar e rectificar, utilizando o *Scrabble©* de marca como modelo, já que "*eles com certeza contaram muito mais páginas de texto que nós*", como dizia Raquel.

Legislativas na sala de aula

(2º ano)

Interessou-nos um trabalho acerca das eleições legislativas, porque a nossa sala foi requisitada como secção de voto, o que causou algum transtorno, uma alteração do dia do Conselho e bastante curiosidade sobre o que os adultos vinham fazer na nossa sala.

Os editais afixados à porta da sala, permitiram-nos fazer algumas comparações.

Figura 32. Eleições- o que aconteceu na nossa sala.

Tiramos algumas conclusões depois das eleições, quando comparamos os resultados com as previsões. Expliquei às crianças que

organizei os números para serem valores por cada 100 pessoas com direito a voto.

Resultados (por cada 100)	os jornalistas pensaram	os votos na nossa sala	os votos no país
P.S.	42	50	44
P.S.D.	29	12	32
C.D.U.	5	26	9
P.P.	6	4	8
B.E.	2	1	2
Outros	B	5	1
Indecisos	15	–	–
	(Expresso)	(Edital da sala)	(Público)

Descobrimos:

- Na nossa sala o P.S. teve mais 6 votos (em 100) do que no país;
- Na nossa sala o 2º partido foi o C.D.U., no país não;
- Na nossa sala o PP teve menos votos (em cada 100) do que no país.

Eleger um presidente

(3º ano)

Uma carta...

Quando se aproximam as presidenciais, os alunos concordam em mandar uma carta para os candidatos à presidência.

Esta carta diz o seguinte:

Olá,

Somos alunos do terceiro ano da Escola de Outurela e Portela.

Queremos saber porque é que quer ser presidente.

Também queremos saber o que vai fazer se for eleito presidente,

Um beijinho de todos.

Enquanto esperamos o resultado do nosso envio, vamos coleccionando algumas indicações de voto acerca das presidenciais.

A campanha é tão morna, que até os meus alunos se entusiasmam menos do que o ano passado por causa das legislativas.

.... e as respostas.

Quinze dias depois, já temos uma resposta de Joaquim Ferreira do Amaral.

Lisboa, 28.11.2000

Olá, alunos da turma do prof. Pascal,

Eu quero ser presidente da República porque julgo que sou capaz de fazer bem a Portugal e ajudar os portugueses. Outros também julgam o mesmo e por isso é que há eleições, para que as pessoas escolham aquele que julgam que faz melhor.

As minhas ideias para Portugal andam a volta do seguinte: não se consegue nada sem esforço, não se consegue nada sem ter objectivos e não se consegue nada sem valores.

Sem valores os objectivos são ilusões e sem objectivos ninguém está disposto a fazer esforços. Quando não há estas três coisas, todos perdemos e todos andamos para trás. E eu não quero que Portugal anda para trás. Porquê? Precisamente por causa de vocês. É uma obrigação nossa, dos mais velhos, que vocês venham a ter uma vida melhor do que a que tivemos nós, assim como vocês hão-de querer o mesmo para os que venham a seguir.

Muitos beijinhos para todos,
Joaquim Ferreira do Amaral

E com mais quinze dias, recebemos também esta carta do António Abreu:

Lisboa, 12 de Dezembro de 2000

Desejo ser Presidente da República para ajudar a tornar melhor a vida dos portugueses.

Se for eleito, vou falar com o Governo e perguntar se o que está a fazer ajuda a melhorar a vida dos portugueses, vou perguntar se todas as crianças vão à escola, se as escolas estão bonitas, se os professores e todas as pessoas que trabalham nas escolas ganham bem, se as crianças mais pobres conseguem estudar e comer na escola, se os pais das crianças têm emprego e se ganham bem, se as pessoas têm liberdade e se o Governo ouve as suas opiniões.

Se o Governo disser que estas coisas não estão a ser feitas, vou dizer-lhe que as tem que fazer e vou à Televisão dizer o mesmo.

Para todos vocês, beijos de

António Abreu

Ana Paula diz logo: "Gosto mais do segundo, porque explica melhor o que vai fazer".

Eu vejo com as crianças alguns conceitos referidos, como "valor", "objectivo", "fazer esforço", comparando até com o trabalho que temos estado a desenvolver sobre a natureza.

Aliás, a este respeito as crianças concordam logo em mandar um exemplar do nosso "Jornal Especial" a cada um dos candidatos, uma forma de agradecer pela resposta que nos deram, mostrando que nos levaram a sério.

Antes das eleições: algumas interpretações.

A tabela mais acessível, é uma que recortamos do Público, e que interpretamos em conjunto, fazendo algumas perguntas.

Intenção de voto nas eleições presidenciais

	Dezembro 2000	Telefónica Janeiro 2001
Jorge Sampaio	62%	67,9%
Ferreira do Amaral	31,6%	27,2%
Fernando Rosas	2%	1,8%
António Abreu	1,7%	2,2%
Garcia Pereira	0,2%	0,9%
Outros	2,4%	—

Figura 33. Tabela 1. Sondagem de "*O Público*" de 08.01.2001: (% quer dizer "em cada 100.")

A discussão leva-nos a concluir[45]:

1. O que aconteceu de Dezembro para Janeiro?
   - Jorge Sampaio, Garcia Pereira, António Abreu subiram.
   - Ferreira do Amaral e Fernando Rosas desceram.
   - Os outros desapareceram! Porquê?
   - Será que já não querem ser?
   - Talvez. Eram muitos, Pascal?
   - (Eu) Não sei muito bem, mas ainda eram dois ou três.
   - Mesmo assim, teriam tido mais do que Garcia Pereira e do que António Abreu.
   - (Eu) Talvez! Não é certo que os votos são exactamente como a sondagem prediz.
2. Quem esteve em 3.º lugar em Dezembro? E em Janeiro?
   - Em Dezembro era Fernando Rosas.
   - Porque?
   - Porque é o terceiro nome na tabela.

[45] Não existe, desta discussão, o registo de quem fala. A conversa é com as mesmas crianças das outras histórias que se passam na Outurela.

- Tens a certeza que é por causa disso? O que se passa em Janeiro?
- Ah! Já não é Fernando Rosas, é António Abreu.
- (Eu) Mas porque? Marlene acaba de dizer que é Fernando Rosas que está em terceiro lugar.
- Mas não é o nome na tabela, Pascal. É o número.
  Primeiro António Abreu tinha 17 e agora tem 22.
- Mas isto não está certo! Porque Fernando Rosas tinha 2 e agora tem dezoito. Abreu sempre teve mais do que ele.
- (Eu) Acham então que o jornal errou em pôr Rosas em terceiro lugar?
- Espera! Não está lá 17 ou 18 ou 22, está lá um tracinho entre os números.
- (Eu) Um tracinho?
- Não, não é. É uma vírgula.
- (Eu) Então, há aqui números esquisitos, com uma vírgula no meio. O que isto quereria dizer?
- Talvez foi engano.
- Não, são números de vírgula. Podes dizer um vírgula cinco.
- (Eu) E isto quer dizer o quê?
- Eu não sei, mas com os Euros dá, a minha mãe é que disse.
- (Eu) Mas aqui não estamos a falar do Euro, pois não?
- Não, isto era de votos. Quantas pessoas votam...
- ... em?...
- ... em cada cem.
- (eu) Para?
- ... para os candidatos.
- (eu) Então?
- Então... não sabem muito bem. Podem ser 1 ou 8 a votar para Rosas, e era 1 ou 7 em dezembro para António Abreu.

- Não, porque não pode ser 2 ou 2.
- Ah! Então era 1 e 7 e 1 e 8 e 2 e 2.
- Não, porque para os outros números põem a conta.
- (Eu) Aliás, se fosse 1 e 7, provavelmente estava escrito de outro maneira. Como se escreve uma adição?
- Com um + (vários).
- (Eu) Lembrem-se do nosso trabalho do ano passado, com a planta da sala (aponto). Lembrem-se o que tivemos que fazer para fazer a planta.
- Tornar mais pequeno!
- Reduzir, sim.
- Ah! Já sei! Não é bem 1, é um e qualquer coisa. Também não é dois, é dois e qualquer coisa.
  (*Margarida lembra-se mesmo do problema do armário que ficou em 7,5 quadrados no plano que fizemos.*)
- Pronto. Vamos voltar a falar de números com vírgulas. Mas agora, quero ver as respostas que encontraram para as outras perguntas, e que tinham a ver com esta segunda tabela:

tabela 2 **(em %)** **Eleitores do candidato**	**País**	**PS**	**PSD**	**CDS**	**PCP**
Jorge Sampaio	67,9	100	20	60	60
Ferreira do Amaral	27,2	0	80	40	10
António Abreu	2,2	0	0	0	22,9
Fernando Rosas	1,8	0	0	0	7,1
Garcia Pereira	0,9	0	0	0	0

3. Qual é o partido que vota em menos candidatos diferentes? E qual em mais?
   - Não temos que ver a primeira coluna?
   - Porque é que dizes isso?

- A primeira coluna não é partido, é o país.
- Acho que a dica de Ruben é boa. Podemos não olhar para a primeira coluna. E nas outras colunas, como é que é?
- São partidos.
- Pascal, o que quer dizer PCP?
- Quer dizer Partido Comunista Português.
- Este não estava da outra vez.
- Estava sim senhor, que recebemos uma carta deles.
- Mas não estavam nas eleições!
- (Eu) Mas estava outro grupo, que agora não aparece.
- Ah! O CDU.
- Muito bem Gisela. Mas então, que respostas têm para esta pergunta?
- No PS há um 100 no Jorge Sampaio e mais nada. Os outros são zéros.
- Então o que isto quer dizer?
- Que em 100, 100 votam para o Jorge Sampaio.
- Dito de outra maneira? Votam para muitos ou poucos candidatos diferentes?
- Poucos!!!
- Até só votam num!
- Os do PSD votam em dois.
- Os do CDS também. CDS? O que é CDS?
- É do Paulo Portas!
- Não é nada! Isto é o Partido Popular. Não tem C.
- (Eu). Este partido já se chamou CDS, já CDS-PP e já PP. Pelos vistos, agora é outra vez CDS. Não tenho a certeza disso.
- O PCP é que votam em muitos. Em todos! Ah, não. Não votam no último.

- Então em quantos candidatos diferentes é que votam as pessoas do PCP?
- Em 4!
- Portanto, o PS vota em menos diferentes, o PCP em mais diferentes.
- Ó Pascal, não estou a perceber. O último, que é Garcia Pereira, prontos, há pessoas que votam nele, mas não são de nenhum partido?
- (Eu) Não, aqui no jornal só puseram os partidos que tem deputados na assembleia da república, e destes ninguém vota em Garcia Pereira. Mas há muitas pessoas no país que não são membro de um partido.

4. O Jorge Sampaio é o mais votado de todos os grupos?
   - Sim!! Em coro.
   - (Eu) Têm a certeza disso?
   - Sim Pascal, todos votam em Sampaio?
   - Mas é o mais votado por todos?
   - Sim, Pascal, até tem 67 votos em 100.
   - Mas a pergunta não é esta. Vejam bem.
   - ...
   - Espera. Todos os grupos quer dizer todos os partidos?
   - Sim
   - Ah! Agora estou a perceber. Então o PSD vota mais para o, ai, aquele que nos escreveu o postal.
   - Portanto, é o mais votado por todos os grupos?
   - Não!!!

Depois das eleições, análise de resultados.

Com o edital dos resultados da secção de votos na nossa sala, afixado à porta da escola, e os resultados das outras secções de votos da escola, elaborei um quadro que apresento à turma:

(tabela 3) candidatos	na nossa escola			distribuição totais
	nossa sala	as duas outras salas		
Garcia Perreira	1,4%	1,8%	1,2%	1,5%
Ferreira do Amaral	14,7%	17,3%	14,3%	15,5%
Fernando Rosas	3,4%	2,4%	4,2%	3,2%
António Abreu	12,9%	5,8%	3,5%	8,1%
Jorge Sampaio	67,7%	72,8%	76,8%	71,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Abstenções	68,7%	68,9%	54,1%	66,2%

Da discussão notei as seguintes observações:

- Isto é outra vez em cada cem?
- Porque é que perguntas isso?
- Porque tem estas duas bolinhas e o traço depois dos números.
- Tens toda a razão.
- É outra vez em cada cem.
- Ii! Na nossa sala houve muito mais a votar para António Abreu, do que nas outras salas.
- Mas Ferreira do Amaral teve mais um pouco!
- Pascal, isto tem outra vez estes números esquisitos, com vírgulas.
- Já falamos disso.
- O que quer dizer abstenções?
- São as pessoas que não foram votar.
- Como quando dizemos no Conselho "quem é que não votou"?

- É isso mesmo. Deixem-me vos mostrar também os resultados no país. Fiz este quadro com o que vinha neste jornal.

Apresento o quadro com as comparações entre o previsto e os resultados reais:

(tabela 4)	no país	previsto
Garcia Perreira	1,5%	0,9%
Ferreira do Amaral	34,5%	27,2%
Fernando Rosas	2,9%	1,8%
António Abreu	5,1%	2,2%
Jorge Sampaio	55,8%	67,9%
Total	100,0%	100,0%
Abstenção	49,1%	

Voltamos a ter uma discussão acerca das percentagens (*o que quer dizer 55% ?*)

Controlamos primeiro quantas pessoas votaram na sala? Foram > ou < que 100? Descobrimos que foram mais do que 100 (*ver tabela número 5, página seguinte*). Só no Sampaio foram 300.

E no país? Vemos no jornal que foi um número grande. Só no Sampaio foi um número maior do que um milhão!

Proponho então de, em vez de pensar em todos, só pensarmos em 100 pessoas. Um pouco como quando para fazer a planta da sala, pensamos em fazer todas as medidas dez vezes mais pequenas. Aqui fazemos muito mais pequeno, para só pensarmos em 100 pessoas.

— Garcia Pereira teve muitos ou poucos votos?

— Poucos! Só teve 6.

(Eu) Mas quando fazemos este resultado mais pequeno, não é 1 voto em 100, mas também não é 2 votos em 100.

— É qualquer coisa entre os dois!

— Exato! E a vírgula é para mostrar que o número a seguir é qualquer coisa entre os dois.

Fomos dividir uma reta numérica em 10 partes, entre os números 0 e 1: 1/10 de , 5/10 de, etc. Digo que isto se chama décimas

Bruno: Isto é a mesma coisa como dos políticos.

Gisela: Pode-se juntar decimas?

Eu: Claro!

Margarida: Então 0,4 mais 0,2 é 0,6.

Tiago: 0,3 mais 0,7 é 0,10

Eu: Não: 7 + 3 é dez, mas 3/10 mais 7/10 é uma unidade!

Esta discussão dará início a um trabalho mais sistematizado com o material Cuisenaire, e com o geoplano, acerca de frações.

Finalmente, deixo esta tabela para completar.

(tabela 5)	nossa sala	nas duas outras salas		total
Garcia Pereira	6	7	3	
Ferreira do Amaral	65	66	37	
Fernando Rosas	15	9	11	
António Abreu	57	22	9	
Jorge Sampaio	300	278	199	
Total				

Depois de alguma hesitação, Gisela descobre que 3 + 37 dá 40 e 11 + 9 da 20, o que dá 60. Insisto para que ela junte 1 ao 199 e tire 1 ao 60, o que facilita a conta.

Ruben descobre que 22 e 278 "também é engraçado", porque dá mesmo 300. Proponho a mesma compensação com 9 e 66, como propus a Gisela. Ruben e Gisela passam a palavra.

Para a nossa sala, 65 + 15 também é fácil, mas mesmo assim, algumas crianças recorrem ao algoritmo.

Nos cálculos horizontais, Bruno observa logo que a conta do

Sampaio é muito fácil: 300 + 277 + 200, e a conta de Garcia Pereira também é "canja".

Ivan descobre que a soma total horizontal e a somo total vertical é a mesma. Demora um pouco até Margarida dizer: "Pois, juntamos os mesmos números!"

Discussões matemáticas à volta de eleições

(4º ano)

O matemático Jorge Buescu escreve no livro *O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias* que o princípio de «um homem – um voto», conhecido por «votação plural», não é o processo mais justo de proceder a uma eleição. No artigo "*Viva o Festival da Canção*" deste livro, o autor demonstra como a votação apenas no candidato favorito, pode não refletir corretamente o conjunto das opiniões dos eleitores. A leitura deste artigo, levou-me a experimentar algumas hipóteses com a turma de 4º ano com a qual estava a trabalhar.

Na nossa sala, temos um sistema complexo de discussão e tomada de decisão. Por regra, discutimos os assuntos entre iguais, em Conselho de Cooperação. É o único lugar de tomada de decisão, por consenso ou por votação.

Não nos consideramos, nem fanáticos, nem fundamentalista. Só nos obrigámos entre nós de estudar de mais perto uma simulação de "eleição de vereadores" para a nossa sala, antes de analisarmos os resultados das eleições autárquicas.

Começámos por 4 votações diferentes e seguidas, todas secretas, com as seguintes regras:

(1) Escolhe 1 nome entre todos os da turma, como representante preferido.

(2) Escolhe 3 nomes entre todos da sala, sendo a tua escolha anterior a primeira. Escreve os três nomes por ordem de preferência no papel.
(3) Agora, os "partidos políticos" indicaram as pessoas que podem ser eleitos. São (A) Ivan, (B) Ana Paula e (C) Margarida. Escolhe o teu favorito.
(4) Os partidos continuam a propor estes mesmos 3 nomes. Ordena-os pela tua preferência.

Não houve problemas de escolha, nas duas primeiras votações. Na 3ª e na 4ª, várias crianças pediram o que fazer se não conseguiam escolher ninguém. Combinámos que então entregavam o papel em branco.

No caso da 4ª votação houve quem não queria dar o seu voto a mais do que um dos candidatos, e houve quem queria deixar o primeiro lugar aberto. Combinámos escrever os números 1, 2 e 3 a frente, para facilitar a leitura posterior.

Depois da participação, mas antes de contar os votos, tivemos uma primeira conversa:

Marlene: Aquilo do Pascal dizer em quem podemos votar, não era muito justo. Podemos querer votar em outro.
Ivan: Isto não era o Pascal, era "o partido".
Ana Paula: É, e menos justo.
Margarida: O mais justo era podermos escolher todos que que-remos.
Ruben: Isto era o primeiro.
Adramane: Não era, não, só podias escolher três.
Rui: Mas pode haver que não quer ser candidato, e assim a gente não sabe se quer ou não.

Bruno: É como nas responsabilidades. Também escolhemos entre quem quer.

Ivan: Mas aqui não era entre quem quer. Era entre quem já era escolhido.

Paula: Mas os políticos não querem ser eleitos?

Eu: Eu penso que sim, é um pouco como com as responsabilidades.

Marlene: Mas quando não há ninguém que diz "*Eu quero ser*", então acho que a primeira maneira é mais justo.

Gisela: É Pascal. Por exemplo, agora para a Câmara, só conhecíamos Arnaldo Pereira, não sabemos nada dos outros. Podes votar para os outros?

Eu: É por isso que mandámos cartas, não? Para saber o programa deles para Oeiras e Carnaxide.

Sérgio: Mas só recebemos carta do Bloco de Esquerda.

Gisela: E tivemos aqui Arnaldo Pereira que é do CDU. Ele não trouxe o programa com ele?

Pascal: Sim. Mas então, o que vocês acharam mais justo, para a votação.

Vários: A primeira maneira.

Outros: Não, a segunda!

Ivan: Ó Pascal, vamos ter que votar...

Treze pessoas acham a segunda maneira a mais justa, três consideram a primeira como sendo a mais justa. As outras duas maneiras são menos justos, "*porque houve quem perguntou como se fazia se não queria votar em ninguém*".

Contámos os quatro conjuntos de votos:

- Para a 1ª e a 3ª votação consideramos 1 voto por pessoa. Para a 1ª votação indicamos os quatro mais votados.

- Para a 2ª e a 4ª votação, atribuímos respetivamente 3, 2 e 1 pontos aos candidatos, conforme a ordem de preferência que ocupam. No caso da 2ª votação listamos as quatro pessoas que recolheram mais pontos.

Na semana seguinte, analisámos os resultados, com os seguintes quadros:

Votação 1
Naomi 3 votos
Ruben 3 votos
Gisela 3 votos
Ana Paula 2 votos

Votação 2
Naomi 14 pontos
Ruben 14 pontos
Ana Paula 12 pontos
Gisela 11 pontos

Votação 3
Ana Paula 7 votos
Ana Margarida 3 votos
Ivan 2 votos
Brancos 4 votos

Votação 4
Ana Paula 25 pontos
Ana Margarida 23 pontos
Ivan 18 pontos
Brancos 30 pontos

Houve comentários:

Marlene: Quando não podemos escolher quem quiser, não é justo, porque Naomi por exemplo, com ela não é justo.

Margarida: Mas Naomi também tem mais votos quando só escolhemos uma pessoa.

Ana Paula: Gisela, uma vez tem mais, outra vez tem menos.

Eu: Quando é que ela tem mais?

Ana Paula: Quando ela tem 3 tem mais.

Tiago: Como? Quando tem 11 tem mais.

Ana Paula: Não, porque tem mais do que eu, e depois tem menos.

Eu: Espera um pouco. Quando ordenámos, demos pontos. Quantos pontos é que cada um podia dar ao todo?

Marlene: 6.

Ivan: Não, sim, seis.

Eu: Como sabes?

Marlene: É 3 + 2 + 1.

Eu: Então, quantos pontos foram ao todo?

Ana Margarida: 6 x 16, é...

Eu: Exato. 6 x 16, porque foram 16 a participar.

Algum cálculo mental e algumas máquinas de calcular. Depois:

Vários: 96.

Eu: E quando votaram para uma pessoa só, quantos votos foram ao todo?

Vários: 16.

Eu: Então a Gisela teve 3 votos em 16 ou 3/16 numa votação e 11/96 noutra. Lembram-se o que o traço significa?

Margarida: São 11 partes de 96.

Ivan: É uma multiplicação, não espera...

Adramane: É uma conta de dividir.

Ivan: É isto que ia dizer.

Eu: Então se queremos comparar os dois resultados, podemos dividir. O resultado será um número grande ou pequeno?

Vários: Pequeno.

Ruben: Muito pequeno.

Eu: Porquê?

Ruben: Porque divides com um número grande.

Eu: E?

Marlene: E o outro número é pequeno.

Eu: Então, façam lá, com a máquina de calcular.

Aparecem os resultados: 0,1875 e 0,1145833.

Ana Paula: Vês, 3 em 16 é mais do que 11 em 96.

Eu: É verdade. Já agora, a Ana Paula teve maior resultado na primeira votação ou na segunda votação, quando só podiam escolher entre três colegas?

Margarida: A primeira, foi aquela onde teve 7 votos em 16?

Bruno: Então é 7 em 16 e 25 em 96.

Adramane: O primeiro é mais.

Eu: Quem pensa que é o segundo?

Seis braços, dois com alguma hesitação.

Eu: Então, podemos procurar como é.

O grupo volta às máquinas de calcular: os resultados dão respetivamente 0,4375 e 0,2604166. Não restam dúvidas.

Os resultados merecem um comentário: na nossa sala, conseguimos desenvolver uma estratégia para construir uma maioria absoluta, com alguém que à partida não era a pessoa mais votada. Vendo desaparecer as suas escolhas preferidas, algo que deixei ao acaso, já que não sabia por quem tinham votado nas duas primeiras voltas, as crianças preferem não atribuir voto, ficando os "não atribuídos" com o resultado mais alto.

Este exercício de estilo, feito com a turma pode não mostrar claramente que "*o ser humano tem tendência para querer tudo para si, assim como para negar a necessidade dos compromissos (e que) os compromissos [...], são frequentemente encobertos ou escondidos sob um diáfano manto de nevoeiro*."[46]. Por outro lado, teve a virtude de ajudar a dissipar o nevoeiro levantado acerca dos números que são claros e decidem tudo, numa votação.

---

[46] John Allen Paulos (1988), página 180.

Construir enunciados.

(2º ano)

02.06.2000: enunciados “sem sentido”.

A discussão de um problema dos correspondentes, faz-nos escrever enunciados à volta de algumas expressões numéricas que proponho no quadro.

Os primeiros enunciados, são antes histórias, algumas bem engraçadas, como a história que Ana Paula conta e fala de uma família de números:

Era uma vez um menino. Chamava-se 20. Ele foi a escola e aprendeu contas de mais e de menos. Adivinhou as contas de mais e de menos. O vinte não adivinhou na de vezes, porque era 5 x 7 = e ele disse 0. A 7 disse: ‘És burro’. O 20 não ligou à sete, ele disse: ‘És estúpido!’ A sete ficou logo zangada.

Ivan vai um pouco no mesmo sentido. Para a expressão numérica 35 : 5 + 20 - 6 = ?, ele conta:

Nós somos quatro irmãos. Um tem o livro com trinta e cinco páginas, o outro tem um livro com 5, outro com 20 e o outro com 6.”

Depois de algumas voltas com muitas hesitações no meio, aparece para 26 : 2 + 25 - 17 = ? a seguinte proposta:

Hugo tinha 26 caricas, e o Rui tinha 25 caricas e o Tiago tinha 17 caricas e a Tatiana tinha 2 caricas.

Não há pergunta, mas quando analisamos, reparamos que o problema dá como expressão numérica: 26 + 25 + 17 + 2. Não é a mesma coisa.

Tatiana: Os números estão trocados.

Ivan: Não há pergunta, não da para saber.

Tiago: Tem que se trocar os números.

Mudamos:

Hugo tinha 26 caricas, e o Rui tinha 2 caricas e o Tiago tinha 25 caricas e a Tatiana tinha 17 caricas.

Hugo: Agora está certo.

Eu: Está mesmo?

Silvana: Sim, os números estão.

Núria: Mas aqui não há conta de dividir.

Sugiro pensar melhor sobre o assunto.

10 minutos depois, olhamos para a proposta de Silvana, Gisela, Margarida e João para 14 x 3 - 30 + 8 = ?:

Maria foi a loja e comprou 14 laranjas e a irmã comprou 3 maçãs, e a prima comprou 30 canetas. João pesa 8 kg. Eles juntaram 14 x 3 - 30 + 8 = 42. Eles descobriram a conta.

Analisamos:

Eu: Qual é a primeira conta?

Núria: 14 + 3

Eu escrevo: 14 laranjas + 3 maçãs.

Eu: Isto dá o quê?

Marlene: Dá fruta.

Eu: E a conta a seguir?

Silvana: São canetas.

Eu: Então, 14 laranjas + 3 maçãs + 30 canetas, dá o que?

É mais difícil. Bruno sugere:

— São coisas.

Eu: E agora. O que fazemos com os kg do João.

Núria: Se o João só pesa 8 kg, é bebé.

Eu: Pois. E dá para juntar os kg's às coisas?

Dúvidas. Depois, Gisela pensa que não dá. Silvana está contrariada, já está a destruir a folha, mas salvo-a *in extremis*. Teremos que pensar em outro enunciado…

O grupo de Bruno, Mário Sérgio, Isabel e Adramane, propõe para 27 : 3 + 20 - 2 = ?

O João tinha 27 rebuçados e ele dividiu pelo Bruno, o Adramane e a Ana Isabel. Ele comprou vinte rebuçados na loja do Bruno. Ficaram com muitos rebuçados para os amigos. Com quantos eles ficaram?

Estamos a aproximar-nos um pouco.

Eu: Qual é a primeira conta aqui?

Marlene: Uma de dividir.

Eu. Então posso escrever 27 : 3

Ivan: E Mario Sérgio, não ficou com rebuçados?

Eles: Não, era para dividir em três.

Eu: E com quantos rebuçados é que ficou João?

Hugo: Com 0.

Eu: E o que fez depois?

Bruno: Foi comprar mais 20.

Eu: Então posso escrever 0 + 20.

Paula: Falta uma coisa!

Núria: Falta uma conta.

Eu: E falta uma ligação entre a primeira conta e a segunda. Assim não vamos lá. Mas aqui, podemos dar a volta ao enun-

ciado. Mas antes disso, podemos ver a proposta do grupo de Núria, Ivan, Marlene e Tatiana.

Para 35 : 5 + 20 - 6, outro grupo escreveu:

O Pascal tinha 35 rebuçados e dividiu-los por 5 meninos.

A Cláudia deu mais 20 rebuçados, mas roubaram 6 rebuçados. Com quantos rebuçados ficou?

Eu: Então, a primeira conta está certa?

Sérgio: É. É 35 : 5.

Eu: E depois fico com quantas?

Vários: Com 0.

Paula: Então também não dá, é como no outro.

Eu: Calma. Qual é a conta a seguir.

Ivan: 0 + 20.

Eu: E depois?

Marlene: Roubaram seis.

Eu: Então o que fazemos?

Hugo: Vamos comprar outros.

Eu: Pois. Mas na conta, o que fazemos?

Bruno: É menos. É menos 6.

Eu: Então temos 0 + 20 - 6.

Só falta ligar as duas partes.

05-06-00: E mais enunciados.

Escrevo no quadro o problema do grupo de Ana Paula. Para a expressão 5 x 7 - 20 + 4 = ? escreveram o seguinte enunciado bastante original:

O Zé foi à escola e a Lili disse duas contas que eram 5 x 7 - 20 + 4 = e ele respondeu 3 e a Lili deu um estalo e o Zé chorou.

Pergunto se aqui temos um enunciado de um problema.

— O que é isso Pascal?, pergunta a Gisela.

Explico que a história do problema é um enunciado. Pode ter muitas ou poucas palavras.

Há dúvidas que se trata de um enunciado; uns dizem que sim, outros que não. Insisto, e pouco a pouco há mais quem pensa que não é enunciado do que quem pensa que é.

Pergunto porquê e há muitas hesitações.
Depois Bruno diz que é porque os números não estão espalhadas.
Tento perceber melhor.

— Os números estão juntos com a conta, é a resposta da Núria.

Aponto e peço se descobrem mais coisas.
Depois pergunto: O que fazemos quando queremos saber uma coisa?

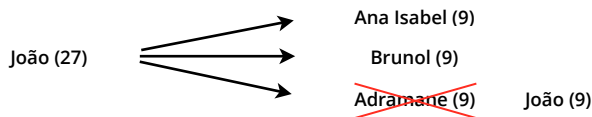
Coro: Perguntamos.
Eu: E aqui?
Núria: Não há pergunta.
Eu: Portanto, não sabemos ao justo o que temos que procurar.

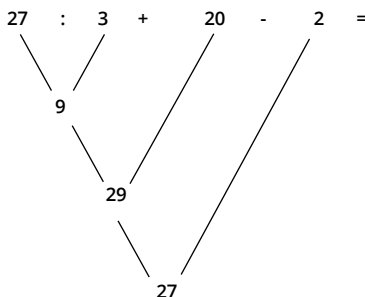
Entretanto já estamos na segunda parte da manhã, depois do recreio. Voltamos ao problema do grupo de Mário Sérgio, e que tem o enunciado mais completo. Volto a escrever no quadro:

O João tinha 27 rebuçados e ele dividiu pelo Bruno, o Adramane e a Ana Isabel. Ele comprou vinte rebuçados na loja do Bruno. Ficaram com muitos rebuçados para os amigos.
Com quantos eles ficaram?

Já tínhamos constatado que havia coisas misturadas aqui: João ficava sem rebuçados depois da distribuição, e depois voltou a ter 20, mas estas não se podiam somar a nada, como estava sugerido anteriormente. Não ficou claro também, o que se faz com o segundo con-

junto de rebuçados.

Proponho deixar Adramane e pôr o próprio João[47]. Assim

aparece:

Organizamos um esquema:

e torna-se muito claro o que temos que mudar no enunciado:

> *O João tinha 27 rebuçados e dividiu-os com o Bruno e a Ana Isabel. Ele comprou vinte rebuçados na loja do Bruno. Ficou com muitos rebuçados. Deu dois ao Adramane. Com quantos rebuçados ficou o João?*

09-06-00: A aposta não está ganha.

A expressão **7 x 4 : 2 + 6 = ?** dá "enunciados" muito estranhos:

- A mãe da Silvana todos os dias da-lhe contas para fazer. São difíceis.
- Era uma vez um menino chamado 7 e um senhor chamado quatro.

---

[47] Havia muitos outros caminhos que se podia seguir...

- A Ana Paula e o Rui foram a loja dos trezentos. A Tatiana e a Ana Margarida foram lá comprar sete Pokémon e o Rui e a Ana Paula comprou seis plantas. O Rui comprou 2 Pokémon.
- Na loja, a Dona Núria tinha 7 caixinhas de pintarolas, custavam 100$00 e a Silvana tinha 200$00. A Gisela e o Hugo também tinha 200$00. Era 2 para cada menino.
- Acha que dá para 3 meninos?
- O Ash foi a loja. Ele comprou 7 Pokémon's. Ele deu 4 Pokémon's ao Broc. Eles dividiram sete vezes quatro dividir mais seis. O Sérgio e o Bruno e o Adramane foram a loja da Misty dois Pokémon's.

Recolho as propostas mas hoje, não temos condições para analisar enunciados. O ensaio da peça de teatro que a turma escreveu em conjunto e que vai apresentar não permite tratar os dados em conjunto…

12-06-00: E mais uma vez, corrigir enunciados.

Depois da organização e da preparação dos planos individuais, decidimos analisar a situação de Ana Paula, Tatiana, Margarida e Rui.

Percebemos que temos uma expressão que difere daquela que foi proposta (7 x 4 : 2 + 6 = ?) inicialmente:

A Ana Paula e o Rui foram a loja dos trezentos. A Tatiana e a Ana Margarida foram lá comprar sete Pokémon e o Rui e a Ana Paula comprou seis plantas. O Rui comprou 2 Pokémon.

Ivan: Uma conta de multiplicar!

Margarida: Mas é vez dois e não vez quatro.

Gisela: Uma conta de somar.

Marlene: Duas contas de somar.

Paula: Não porque são plantas e Pokémon's.

Eu: Podemos somar coisas compradas, ou então o Rui também compra Pokémon's.

Concordamos em alterar a expressão para 7 x 2 + 6 + 2 = ?, e de alterar o enunciado só num sítio:

A Ana Paula e o Rui foram a loja dos trezentos. A Tatiana e a Ana Margarida foram lá comprar sete Pokémon e a Ana Paula comprou seis Pokémon's. O Rui comprou 2 Pokémon. Quantos Pokémon's compraram?

Pergunto se podemos inventar a partir daí outro enunciado que dá a expressão que inicialmente escrevi no quadro.

Núria: Se os quatro meninos compram 7 Pokémon's

Começamos:

A Ana Paula, a Ana Margarida, a Tatiana e o Rui compram 7 Pokémon's cada um.

Eu: E agora?

Ivan: Uma conta de dividir.

Eu: O que podemos inventar? Dividir por dois, também é 1/2.

Ivan: Isto é um e meio, não não é meio, é metade!

Margarida: Então, damos metade a outro menino.

Eu: Quem?

Paula: Pode ser o Bruno.

Escrevemos:

A Ana Paula, a Ana Margarida, a Tatiana e o Rui compram 7 Pokémon's cada um. Dão a metade dos seus Pokémon's ao Bruno.

Eu: E agora, o que o Bruno faz?

Gisela: Tira seis.

Marlene: Dá seis a outro menino. Não, não é outro menino que dá 6 ao Bruno.

Tiago: O Sérgio.

Gisela: Outro menino dá?

Ana Paula: Oh Pascal, dá ou tira?

Pascal: Então, vai ficar com mais 6 do que a metade ou com menos 6 do que a metade?

Escrevemos:

O Sérgio dá seis dos seus Pokémon's ao Bruno.

Eu: E agora, qual é a pergunta?

Tiago: Com quantos fica o menino?

Eu: Qual menino?

Paula: O Bruno.

Escrevemos:

Quantos Pokémon's tem o Bruno?

Depois do recreio, ainda analisamos o enunciado de Marlene, Núria, Silvana e Gisela:

Na loja, a Dona Núria tinha 7 caixinhas de pintarolas, custavam 100$00 e a Silvana tinha 200$00. A Gisela e o Hugo também tinha 200$00. Era 2 para cada menino. Acha que dá para 3 meninos?

Marlene: Dá e sobra um.

Eu: Calma! Como sabes isso?

Tiago: São 6 e são 7, então fica um Pascal.

Eu: E têm dinheiro para isso?

Silvana: Claro Pascal. Então é 100 por caixa, cada um tem para comprar dois.

Eu: Então aqui temos 7 caixas equivalem 700 escudos. 600 escudos equivalem 6 caixas. 100 escudos equivale uma caixa. Portanto: sobre uma caixa.

Temos: 200$+200$+200$= 600$. 600$ é a mesma coisa como 6 caixas. 7 - 6 é 1. Dá para os três ficarem com duas caixas. E agora, como fazemos para ter a expressão que pedi:
7 x 4 : 2 + 6 = ?

Grande silêncio....

Eu: As caixas vêm em cartões. Quantos cartões temos?
Marlene: 7, não 4.
Eu: E quantas caixas em cada cartão?
Tiago: 7
Eu: Como é que os dividimos.
Tatiana: Pomos no balcão.
Eu: Boa, uma parte do lado esquerdo, outra parte do lado direito.

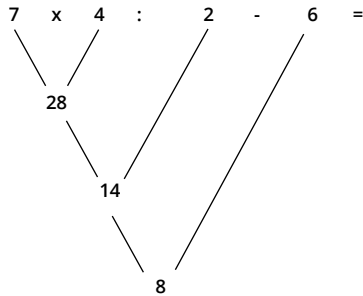
Escrevemos:

Na loja, a Dona Núria tem 4 cartões com 7 caixas de pintarolas. Põe a metade no lado esquerdo do balcão, outra metade no lado direito.

Eu: E agora?
Núria: Os meninos compram seis caixas.
Eu: E a Dona Núria tira de aonde?
Marlene: Do lado esquerdo.

Escrevemos:

A Gisela, o Hugo e a Silvana compram 6 caixas. A Dona Núria tira as do lado esquerdo.

Eu: E qual é a pergunta?
Ivan: Quantas caixas ficaram no lado esquerdo do balcão.
Tiago: É uma.
Eu: Não sei. Fazemos uma árvore das operações, e registamos:

Núria: Mas agora temos - 6 e não + 6

Gisela: Deixa, que assim também é um problema giro.

Eu: Então pode ficar assim? Aceitam que estamos a fazer um enunciado para outra expressão?

Existe um acordo generalizado que assim também fica bem…

Referências bibliográficas

Brissiaud, Rémi (1989). *Como as crianças aprendem a calcular*, Lisboa: Piaget.

Dienes (Sem data). *Exploration de l'espace et pratique de la mesure,* Paris: OCDL.

Charnay, Roland (2004). "L'école primaire, première étape de la culture mathématique des élèves", in *Cahier Pédagogiques nº 427.*

Glaeser, Georges (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Holton, Gerald (1996). *Einstein, history and other passions*, (trad.1998). Lisboa: Gradiva

Mason, John (1997). *L'Esprit mathématique*, Paris-Bruxelles: De Boeck & Larcier.

Mata, Isabel (2001). *Psicologia do Desenvolvimento e de Aprendizagem,* Lisboa: Universidade Aberta.

Paulos, John Allen (1988). *Inumerismo. O analfabetismo matemático e as suas consequências*, Lisboa: Publicações Europa - América.

Paulos, John Allen (1991). *O circo da matemática. Lisboa,* Publicações Europa - América

Ponte, João Pedro, & Serrazina, Lurdes (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico,* Lisboa: Universidade Aberta.

Rede Eurydice (2012). *Números da educação,* http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice, acedido em 22-12-2017.

Sagan, Carl (1997). *Um mundo infestado de demónios. A ciência como uma luz na escuridão*, Lisboa: Gradiva.

Sierpinska, Anna(1997). *La compréhension en mathématiques*, Paris-Bruxelles : De Boeck & Larcier.

Valente, Cristina (1999). *Representações de acontecimentos e desempenho na resolução de problemas matemáticos: influencia da idade, do script, da operação matemática e da formulação do problema, Monografia de final de curso em psicologia educacional,* Lisboa: ISPA.

Vergnaud, Gerard (1981) "Les problèmes de type additif". *In Lang, Peter: L'enfant, la mathématique et la réalité (pp. 131-146),* Collection exploration recherches en science de l'éducation.

Vergnaud, Gérard (1986) "Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas." *Análise psicológica n.º 1 (V), pp. 75-90*.

Vergnaud, Gérard (1994) "Raisonnement en Physique et en Mathématique". *Psychologie Française 39 (2)*.

Vergnaud, Gérard(1996). *In J. Brun (dir) Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996

Os autores

Miguel Narciso é psicólogo educacional. Interessou-se desde sempre na forma como crianças resolvem problemas. Investigou nesta área a partir do trabalho de Gérard Vergnaud.

Pascal Paulus é professor do ensino primário. Começou a trabalhar em 1977 e passou por escolas públicas e privadas na Bélgica e em Portugal.

Juntamos aqui algumas ideias e estratégias que consideramos importantes no desenvolvimento de atividades de iniciação à Matemática, relacionados com a análise e resolução de situações problemáticas de diversos tipos, encontrando-se expressos nos exemplos de discussões matemáticas aqui relatados.
Estes exemplos abrangem um período de vinte e um anos e dois países: Bélgica e Portugal.